



Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
«ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

МИР математики

А.С. Шалимов

Случайные процессы

Учебное пособие

3-е исправленное издание

ТЕХНОСФЕРА

Москва

2026

УДК 519.216

ББК 32.811

Ш18

Рецензенты:

доктор технических наук, начальник лаборатории отдела проектирования систем на кристалле АО НПП «Элвис» Беляев А.А.

кандидат физико-математических наук, проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Проектирование и технология электронных средств» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (УлГТУ) Климовский А.Б.

Ш18 Шалимов А.С.

Случайные процессы

3-е исправленное издание

Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2026. – 142 с. ISBN 978-5-94836-746-0

Учебное пособие посвящено изучению теоретических и практических вопросов в области теории случайных процессов. Рассмотрены теоретические аспекты законов распределения и моментных функций, преобразования Фурье, корреляционных функций и спектральной плотности случайных процессов, а также линейных и нелинейных преобразований случайных величин. Каждая глава сопровождается примерами решения типовых задач, большая часть которых сосредоточена в последней главе – «Линейные и нелинейные преобразования случайных величин».

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и 11.03.01 «Радиотехника», а также для аспирантов и инженеров, занимающихся исследованиями в области разработки цифровых фильтров.

УДК 519.216

ББК 32.811

© Шалимов А.С., 2026

© АО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», оригинал-макет, оформление, 2026

ISBN 978-5-94836-746-0

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
ГЛАВА 1.	
Законы распределения и моментные функции	9
Задачи к главе 1	21
ГЛАВА 2.	
Преобразование Фурье	36
Задачи к главе 2	56
ГЛАВА 3	
Корреляционные функции и спектральные плотности (энергетические спектры) случайных процессов	61
Задачи к главе 3	72
ГЛАВА 4	
Линейные и нелинейные преобразования случайных величин	77
Задачи к главе 4	93
Список литературы	140

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однажды, будучи студентом, я получил предложение работать схемотехником на соседнем предприятии. Честно говоря, не раз замечал, как, случайно наткнувшись на более-менее сложную схемку из транзисторов, ощущал чуть ли не благоговейный трепет и жуткий интерес в ней разобраться (хотя при этом абсолютно не понимал, что вообще передо мной нарисовано). А незадолго до этого, перед сдачей экзамена, случайно увидел в кабинете одного преподавателя потертый внушительных размеров том «Основы теории транзисторов и транзисторных схем» И.П.Степаненко. И после этого меня спрашивают, хочу ли я работать схемотехником:

- А ты знаешь схемотехнику хоть как-нибудь? Может, опыт какой есть?
- Нет.

Оставалось только подписать направление у начальника. В кабинет меня привели со словами:

- Вот перспективный студент, средний балл равен 4.5, он хотел бы проходить практику на нашем выпускающем предприятии схемотехником.
- Давайте попробуем, но я не могу ни гарантировать, что вас возьмут, ни тем более звонить туда и содействовать этому.

Пришел на собеседование. Длилось оно недолго, его суть можно было свести лишь к одной фразе: «Ничего не умею, но хочу». Поставленная задача звучала коротко и просто: «Есть у нас изделие, в котором уже давно стоит генератор шума. Он работает, но никто толком не знает, как. Вот заодно и тема для бакалаврской будет. Вперед».

Как я «разбирался» с этой задачей – отдельная история. Но следующее задание было ещё веселее: «Есть генератор случайных чисел на шумовом диоде, который мы как-то заставили работать, но поставщик теперь предлагает другие диоды, и ты должен разобраться, подойдут ли они, и если да, то что нужно нам скорректировать в устройстве».

В общем, пошел туда, куда меня послали. В библиотеку. Четырехтомник «Случайные процессы. Примеры и задачи» В.И. Тихонова (и др.) я взял не раздумывая. Так же как и двухтомник Б.И. Шахтарина «Случайные процессы в радиотехнике». И ещё много других замечательных книг.

Каждый рабочий день последующих трёх месяцев проходил одинаково: вспоминал теорию функции комплексной переменной, вспоминал, как брать производные и всевозможные интегралы, вспоминал теорию вероятности. Решал всем знакомые задачки про подбрасывание монетки и разноцветные шары в урне. Постепенно подобрался к критерию Пирсона, используя который, другие сотрудники кое-как настроили работу схемы. И понял, что решение здесь нельзя найти в принципе. Также я понял, что на работе о моем существовании попросту забыли...

В паспорте на диод было всего два параметра, которые влияли на параметр третий — параметр схемы. Их и нужно было правильно связать друг с другом. В «Случайных процессах» нашел упоминание первых двух, в этом не было ничего сложного, проблема в другом — как они связаны с третьим? Этот вопрос пока оставил в стороне, поскольку мне для понимания даже первых двух параметров нужно было потренироваться на типовых задачах. Решать задачи по случайным процессам было намного тяжелее, чем по теории вероятности, некоторые не поддавались в принципе, поэтому стал обращаться к репетиторам и не отставал от них до тех пор, пока выбранная мной задача не становилась понятна до конца. Ход решения при этом тщательно записывал.

С первыми двумя параметрами разобрался — а дальше что? Нигде не было прямого упоминания о том, как они связаны с третьим параметром. Бегло листая двухтомник «Случайные процессы», ближе к его концу наткнулся на раздел «Выбросы случайных процессов», в котором был приведен параметр, похожий на тот, который нужен мне. Но проблема в том, что даже в этом двухтомнике раздел про выбросы был написан настолько кратко, что ничего, кроме понимания правильного направления поиска, не появилось. По списку литературы нашел книгу В.И. Тихонова 1970-го года выпуска именно по этой теме. Поскольку в электронном виде найти её не смог, то заказал почтой

на одном из букинистических сайтов, где частники размещают объявления.

Был июль 2007 года, мы с родителями уже собирались в отпуск на дачу. Зашел к начальнику по поводу отъезда и, думая, что заскочил на минутку, получил:

- Надо подать тезисы на конференцию. Прямо сейчас.
- Единственное, что у меня сейчас есть, – это незаконченный расчёт генератора случайных чисел. Который мало того что недоделан, так я ещё и не уверен, прав ли я вообще.
- Именно для этого и организуются конференции. Просто пишешь и докладываешь свои идеи как есть, правильные или нет, – коллеги поправят. До самого выступления ещё больше месяца, а в тезисах так и пиши: «Получен предварительный результат... требуется проверка... это не само решение, а подготовка к нему...»

Книга пришла незадолго до отъезда. Но сначала это не помогло. Да, я нашел в ней нужный раздел, но связать всё воедино не получалось. Шли дни, а я так и не знал, как найти решение. Беспокойство нарастало – что докладывать? Что я попытался чего-то там такое решить и не решил? Я бродил по дому, перебирая на память всё, в чем смог разобраться. Деревянные стены уныло смотрели на меня, а я упорно цеплялся взглядом за мелкие детали, как будто ответ был именно в них. Пасмурная погода приближающейся осени и загородная тишина давили на меня и подстегивали одновременно. Эту страницу я прочитал не раз. В какой-то момент провокационная мысль «что, если?...» пронзила, подбросив меня на месте. Огрызком карандаша в тетрадке, которая оставалась не до конца исписанной ещё со школы и которую я закинул в сумку перед отъездом по принципу «вроде есть на чем писать, сойдет и так», бросился делать расчёт уже с начала и до самого конца. Подставив в конечное выражение значения тех самых двух параметров, получил значение третьего параметра, который мне дали на работе в качестве отправной точки для самопроверки. Всё. До конца отпуска оставалось несколько дней...

Но я же не математик! И никогда им не был! Может, я придумал очередную чушь, за которую меня люди, хоть немного

сведущие в случайных процессах, размажут на докладе?! Пошел на кафедру высшей математики, спросил, с кем можно проконсультироваться по случайным процессам, т.к. у меня есть решение одной задачи и я хотел бы, чтобы меня проверили. Нашел нужного преподавателя, отдал ему расчёт, спросил, когда можно подойти за результатом. Через неделю пришел и получил:

- Ну, вот здесь, в начале, есть несколько сомнительных моментов, это опустим, а вот здесь, — и при этом показывает на отправное выражение для связки трех параметров, — вы хотите сказать, что вероятность появления случайной величины будет равняться 100%?
- Так ведь это классическое условие нормировки.
- Вы хотите сказать, что случайная величина в указанном диапазоне появится с вероятностью 100%? Это же случайная величина! Такое вообще возможно?!

С этими словами он сунул мне изрядно помятые листы с расчётами, и в довольно резкой форме мы попрощались.

Ладно, думаю, на конференции мне хоть что-нибудь да скажут.

Пока я докладывал, один из членов комиссии задумчиво смотрел на график в презентации, как будто пытался там что-то отыскать.

- Таким образом, можно утверждать, что в шумовом сигнале всегда присутствуют точки, статистически независимые друг от друга, следующие друг за другом с определённой частотой повторения. Если делать выборку именно с этой частотой, то полученные числа будут абсолютно случайными.

Когда я замолчал, то в помещении повисла длинная пауза: народу было мало, большую часть составляли такие же студенты, как и я, но один из них всё же робко спросил:

- То есть полученные числа будут абсолютно случайны?
- Да.

Председатель комиссии спросил:

- Вы патентовали это решение?
- Нет.

– Вам следует об этом подумать.

С тех пор прошло 15 лет. Интерес к небольшой задаче, которую автор тогда не смог решить правильно потому, что вовремя не перевернул страницу учебника, привел к решению новому, легшему в основу докторской диссертации, работа над которой продолжается уже 15 лет. Почему автор так долго переворачивает страницы? Да потому, что читать подобные учебники крайне тяжело. Приходится просто «вгрызаться» в каждый абзац и обращаться ко многим дополнительным источникам для того, чтобы шаг за шагом прорываться сквозь тьму жутких формул навстречу своей мечте. Ну а чтобы достигнутые успехи не забывались, все ходы были тщательно записаны. Так получилось настоящее учебное пособие.

Автор ни в коем случае не претендует на новизну тех положений теории случайных процессов и сформулированных задач, которые приведены в учебном пособии. Конечно же, всё это известно давно: ссылки на заимствованные источники приведены в конце книги. Дело в другом – в авторском видении подхода к порядку изложения материала и, что самое главное, в авторской манере решения стандартных задач.

Теоретические части преимущественно представляют собой цитирование источников в том объеме, который достаточен для понимания хода решения задач, – для этого они были снабжены комментариями. Но главной целью пособия является именно подробный разбор задач по случайным процессам. настолько подробный, что – автор искренне надеется – читатель сможет освоить этот объем информации не за полгода неравной битвы с формулами (как было с автором), а за одну-две недели приятного, ненавязчивого чтения за чашечкой кофе. И сможет намного легче и быстрее получить новые и интересные решения в области теории случайных процессов.

ГЛАВА I

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Случайный процесс $\xi(t)$ [1, 2] считается определённым на интервале времени $(0, T)$, если при произвольном числе n и для любых моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n на этом интервале известна n -мерная плотность распределения вероятностей $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Требования к $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$:

- положительной определённости:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0,$$

- нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1,$$

- симметрии:

функция $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ не должна изменяться при любой парной перестановке аргументов x_1, x_2, \dots, x_n и t_1, t_2, \dots, t_n ,

- согласованности:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n, \end{aligned}$$

для любых $m < n$.

Помимо функции плотности распределения вероятности используются т. н. моментные функции – более простые характеристики.

n -мерная начальная моментная функция, зависящая от n несовпадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , порядка $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$:

$$m_{v_1+v_2+\dots+v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = E\{\xi^{v_1}(t_1)\xi^{v_2}(t_2)\dots\xi^{v_n}(t_n)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n} W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Для порядка $v = v_1 + v_2$ (например)

$$m_{v_1+v_2}(t_1, t_2) = E\{\xi^{v_1}(t_1)\xi^{v_2}(t_2)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{v_1} x_2^{v_2} W(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = m_2(t_1, t_2).$$

Соответственно, имеют место несколько частных случаев:

- одномерная начальная моментная функция первого порядка:

$$m_1(t) = E\{\xi^1(t)\} = E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x, t) dx = m_{\xi}(t),$$

где $m_{\xi}(t)$ – математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$;

- двумерная начальная моментная функция второго порядка:

$$m_{v_1+v_2}(t_1, t_2) = E\{\xi^{v_1}(t_1)\xi^{v_2}(t_2)\} = \left| \begin{matrix} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \end{matrix} \right| = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = R_{\xi}(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2),$$

где $R_{\xi}(t_1, t_2)$ – корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$.

n -мерная центральная моментная функция, зависящая от n несовпадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , порядка $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$:

$$\mu_{v_1+v_2+\dots+v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ E\left\{\left(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)\right)^{v_1} \left(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2)\right)^{v_2} \dots \left(\xi(t_n) - m_{\xi}(t_n)\right)^{v_n}\right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{\xi}(t_1))^{v_1} \cdot (x_2 - m_{\xi}(t_2))^{v_2} \cdot \dots \cdot (x_n - m_{\xi}(t_n))^{v_n} \cdot \\ \cdot W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$



Соответственно, имеют место несколько частных случаев:

- двумерная центральная моментная функция второго порядка:

$$\begin{aligned} \mu_{v_1+v_2}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1) \right)^{v_1} \left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2) \right)^{v_2} \right\} = \\ &= \left| \begin{array}{l} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 - m_\xi(t_1) \right)^{v_1} \left(x_2 - m_\xi(t_2) \right)^{v_2} \cdot \\ &\cdot W(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = K_\xi(t_1, t_2), \end{aligned}$$

где $K_\xi(t_1, t_2)$ – ковариационная функция случайного процесса $\xi(t)$.

В том случае, если $t_1 = t_2 = t_x$:

$$\begin{aligned} \mu_2(t, t) &= \mu_2(t) = \\ &= E \left\{ \left(\xi(t) - m_\xi(t) \right)^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_\xi(t) \right)^2 W(x; t) dx. \end{aligned}$$

Возвращаемся к выражению для корреляционной функции:

$$\begin{aligned} m_{v_1+v_2}(t_1, t_2) &= E \left\{ \xi^{v_1}(t_1) \xi^{v_2}(t_2) \right\} = \left| \begin{array}{l} v_1 = v_2 = 1 \\ t_1 = t_2 = t \end{array} \right| = \\ &= E \left\{ \xi^2(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x, t) dt = R_\xi(t, t) = m_2(t, t). \end{aligned}$$

Соответственно, выражение для $\mu_2(t_1, t_2)$ примет вид:

$$\mu_2(t_1, t_2) = R_\xi(t, t) - m_\xi^2(t).$$

Далее устанавливаем важную связь между $R_\xi(t)$ и $K_\xi(t)$:

$$R_\xi(t, t) - m_\xi^2(t) = K_\xi(t, t), \text{ для случая } t_1 = t_2 = t$$

$$K_\xi(t, t) = D_\xi(t),$$

где $D_\xi(t)$ – дисперсия случайного процесса $\xi(t)$.

Соответственно, среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)} = \sqrt{E \left\{ \left(\xi(t) - m_\xi(t) \right)^2 \right\}}.$$

Наряду с понятием функции плотности распределения вероятности есть инструмент характеристических функций (и в некоторых случаях он более удобен).

Характеристическая функция случайной величины X :

$$\Theta_X(j\omega) = E\{e^{j\omega X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} W(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) e^{j\omega x_n},$$

где $p(n)$ – распределение вероятностей.

Производящая функция случайной величины X :

$$\Phi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) s^n,$$

где s – оператор Лапласа.

Соответственно, $\Theta_X(j\omega)$ используется для непрерывных случайных величин, а $\Phi_X(s)$ – для дискретных случайных величин.

По известной $\Theta_X(j\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье можно определить функцию плотности распределения вероятности:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_X(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) e^{-j\omega_1 x_1} e^{-j\omega_2 x_2} \dots e^{-j\omega_n x_n} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n. \end{aligned}$$

Также для случайной величины (а не случайного процесса!) может быть рассмотрена моментная функция:

$$\Phi_X(s) = E\{e^{sX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sX} W(x) dx,$$

в том числе

- вторая характеристическая функция:

$$\Psi_X(j\omega) = \ln(\Theta_X(j\omega)),$$

- вторая моментная функция:

$$\Psi_X(j\omega) = \ln(\Phi_X(s)).$$

Соответственно, n -я производная от моментной функции

$$\Phi_X^{(n)}(s) = E\{X^n e^{sX}\},$$

$$\Phi_X^{(n)}(0) = E\{X^n\} = m_n - \text{начальный момент } n\text{-го порядка.}$$

Частные случаи:

$$\begin{aligned}\Phi'_X(0) &= m_1, \\ \Phi''_X(0) &= m_2 = m_1^2 + \sigma^2.\end{aligned}$$

Разложение моментной функции в ряд Маклорена:

$$\Phi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} s^n.$$

Если вернуться к вопросу о функции плотности распределения вероятности, связь с характеристической функцией (для многомерного случайного процесса) имеет вид

$$\begin{aligned}\Theta_{\xi}(ju_1, ju_2, \dots, ju_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= E \left\{ \prod_{i=1}^n e^{ju_i \xi(t_i)} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ju_1 x_1 + ju_2 x_2 + \dots + ju_n x_n)} \cdot W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,\end{aligned}$$

при том что

$$\begin{aligned}\xi(t_1) &= x_1, \\ \xi(t_2) &= x_2, \\ &\vdots \\ \xi(t_n) &= x_n.\end{aligned}$$

Соответственно, можно установить связь между характеристической функцией и n -мерной начальной функцией:

$$\begin{aligned}m_{v_1+v_2+\dots+v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= j^{-(v_1+v_2+\dots+v_n)} \left(\frac{d^{(v_1+v_2+\dots+v_n)} \cdot \Theta_{\xi}(ju_1, ju_2, \dots, ju_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{du_1^{v_1} du_2^{v_2} \dots du_n^{v_n}} \right).\end{aligned}$$

Кроме того, есть связь между K_{ξ} и R_{ξ} через начальные моментные функции:

$$\begin{aligned}K_{\xi}(t_1, t_2) &= E\{(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2))\} = \\ &= R_{\xi}(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2),\end{aligned}$$

где $m_{\xi}(t_1)$ – математическое ожидание случайной величины $\xi(t_1)$,

$$\begin{aligned}K_{\xi}(t_1, t_2, t_3) &= \mu_3(t_1, t_2, t_3) - m_1(t_1)K_{\xi}(t_2, t_3) - m_1(t_2)K_{\xi}(t_1, t_3) - \\ &- m_1(t_3)K_{\xi}(t_1, t_2) + 3m_1(t_1)m_1(t_2)m_1(t_3).\end{aligned}$$

Связь характеристической и моментной функции:

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi} (ju_1, ju_2, \dots, ju_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = 1 + j \sum_{k=1}^n m_1(t_k) u_k + \frac{1}{2!} j^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{1,1}(t_k, t_l) u_k u_l + \\ + \frac{1}{3!} j^3 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n m_{1,1,1}(t_k, t_l, t_m) u_k u_l u_m + \dots \end{aligned}$$

Связь характеристической и корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi} (ju_1, ju_2, \dots, ju_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = e^{\left(j \sum_{k=1}^n R_{\xi}(t_k) u_k + \frac{1}{2!} j^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R_{\xi}(t_k, t_l) u_k u_l + \frac{1}{3!} j^3 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n R_{\xi}(t_k, t_l, t_m) u_k u_l u_m + \dots \right)}. \end{aligned}$$

Для гауссова случайного процесса

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta}} e^{-\frac{1}{2\Delta} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Delta_{kl} (x_k - m_{\xi}(t_k))(x_l - m_{\xi}(t_l))},$$

где

$m_{\xi}(t_k), m_{\xi}(t_l)$ – математическое ожидание случайной величины $\xi(t_k)$ и $\xi(t_l)$,

$\Delta = |K_{\xi}|$ – определитель n -ого порядка, составленный из значений $K_{\xi}(t_k, t_l)$,

Δ_{kl} – алгебраическое дополнение элемента $K_{\xi}(t_k, t_l)$ определителя Δ .

Случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в узком смысле, если все его $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ произвольного порядка n не меняются при одновременном сдвиге всех точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль оси времени на любое τ .

Случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в широком смысле, если $E\{\xi(t)\}$ (математическое ожидание) не зависит от времени, а корреляционная функция $R_{\xi}(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности $\tau = |t_1 - t_2|$. Для определения $m_{v_1+v_2+\dots+v_n}$ и $\mu_{v_1+v_2+\dots+v_n}$ нужно иметь все реализации, но это не всегда возможно. Поэтому было введено понятие «эргодического» случайного процесса – такой случайный процесс, статистические характеристики которого могут быть определены всего лишь по одной реализации.