МИР
математики

В.И. Хименко

Случайные данные: модели, структура и анализ

Издание второе, переработанное и дополненное

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2024

УДК 519.21: 537.86
ББК 22.17
Х46

Рецензенты:
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Р.М. Юсупов, *член-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники РФ;*
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Б.И. Шахтарин, *доктор техн. наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники РФ;*
Международный центр по окружающей среде и дистанционному зондированию имени Нансена («Нансен-центр»)
В.В. Мелентьев*, доктор физ.-мат. наук, профессор;*
Д.В. Поздняков, *доктор физ.-мат. наук, профессор.*

Х46 Хименко В.И.
Случайные данные: модели, структура и анализ
Издание второе, переработанное и дополненное
Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2024. – 576 с., ISBN 978-5-94836-692-0

Книга посвящена одной из наиболее общих проблем физики и техники, биологии и естествознания - проблеме извлечения информации из случайных данных (наблюдений, измерений, экспериментальных исследований). Эта проблема включает в себя этапы сбора данных, построения моделей реальных процессов и систем, анализ и интерпретацию получающихся результатов.

В книге дается описание и детальный анализ структуры наиболее важных с точки зрения приложений моделей временных рядов, непрерывных случайных процессов, случайных потоков событий, случайных полей и изображений. Представлено большое количество новых результатов по вероятностному анализу неоднородных данных, отображениям случайных процессов на фазовой плоскости, характеристикам выбросов и характеристикам превышений заданных уровней. Показывается широкое разнообразие практических задач, которые решаются (или могут решаться) на основе рассмотренных моделей случайных функций.

В новом издании книги дополнительно рассмотрены вопросы исследования экстремальных значений случайных функций, показаны особенности построения вероятностных моделей с двойной стохастичностью и возможности анализа случайных процессов в условиях случайных сред.

Для широкого круга специалистов, аспирантов и студентов, для тех, кто изучает, исследует и применяет на практике модели и методы анализа различных по своей физической природе случайных данных.

УДК 519.21: 537.86
ББК 22.17

ISBN 978-5-94836- 692-0

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Эта книга представляет собой переработанный и существенно дополненный вариант книги, опубликованной издательством «ТЕХНОСФЕРА» в 2017 году (Хименко В.И. Случайные данные: структура и анализ. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2017. – 424 с.). Основной материал первого издания серьезной переработке не подвергся и практически сохранился в прежнем виде. Существенные изменения во втором издании связаны с рассмотрением вероятностного описания неоднородных данных. При этом введены две новые главы, в которых показаны особенности построения вероятностных моделей с двойной стохастичностью (Глава 6) и возможности исследований случайных процессов в условиях случайно-неоднородных сред (Глава 7). Потенциальная полезность таких результатов объясняется большим разнообразием практических задач, в которых рассматриваются стохастические системы и изучаются случайные процессы со случайными изменениями основных параметров или случайными изменениями их общей вероятностной структуры.

Характерными примерами подобных систем могут быть стохастические системы автоматического управления в задачах локации, навигации и связи, системы искусственного интеллекта с перестраиваемой вероятностной структурой, системы компьютерного зрения и распознавания образов, различные адаптивные и самонастраивающиеся системы живой и неживой природы.

Помимо введения новых глав, во второе издание книги добавлен раздел 2.12, результаты которого относятся к классическим областям вероятностных исследований экстремальных значений случайных процессов.

Заметно пополнен основной список литературы.

Теперь несколько слов о содержании книги.

Трудно найти какую-либо область науки, техники, биологии, экономики или естествознания, в которой не проводились бы различные наблюдения, измерения или экспериментальные исследования. Во всех этих областях возникают вопросы описания, анализа и извлечения полезной информации из полученных данных. В свою очередь, полученные данные, как правило, могут изменяться случайным образом, и основные методы их описания приводят к необходимости рассмотрения разнообразных моделей случайных функций.

Вопросам построения вероятностных моделей, статистическим методам исследований и общей теории случайных функций посвящено достаточно много хороших изданных монографий, учебников и учебных пособий, некоторые из которых перечислены во Введении.

Данная книга по своей общей направленности также связана с рассмотрением прикладных вопросов использования моделей случайных функций в решении различных практических задач, однако по своему характеру она существенно отличается от всех известных изданных книг. Отличается по общему содержанию, по форме представления и характеру изложения основных результатов. Эти отличительные особенности можно заметить уже на этапе предварительного просмотра оглавления, введения и кратких аннотаций, которыми открывается каждая глава.

Изложение основного материала в данной работе начинается с расширенного Введения. Здесь делается попытка хотя бы приближенно очертить состояние исследований, разнообразие областей и спектр практических приложений, связанных с общей проблематикой обработки и анализа случайных данных.

После вводной части все содержание книги разделено на несколько самостоятельных глав. В первой главе показываются обобщенные модели получения, преобразования и обработки информации, проводится общая классификация случайных функций и выделяются особенности типовых задач теории статистических решений. Материал последующих четырех глав посвящен рассмотрению моделей и результатов анализа основных классов случайных функций: анализу временных рядов или случайных последовательностей (глава 2), исследованиям непрерывных случайных процессов (глава 3), рассмотрению случайных потоков событий и случайных точечных процессов (глава 4), анализу пространственно-временных данных на уровне моделей случайных полей и изображений (глава 5).

Две следующие главы (главы 6 и 7) связаны с проблемами анализа случайных процессов в условиях случайно-неоднородных сред. Здесь показаны особенности влияния случайных сред на отдельные параметры и общую структуру вероятностных моделей, особенности возникновения и описания двойной стохастичности. На примере отдельных самостоятельных задач рассмотрены возможности исследований случайных процессов в случайных средах.

В каждой главе показываются основные модели процессов и результаты их анализа, выделяются наиболее важные характеристики и приводятся примеры различных прикладных задач. В книге представлено большое количество новых результатов. В основном они относятся к вероятностному описанию неоднородных данных, исследованиям детальной вероятностной структуры процессов, представлениям случайных функций на фазовой плоскости и анализу диаграмм рассеяния, исследованиям структуры случайных точечных процессов и исследованиям пространственно-временных характеристик случайных полей.

Все основные результаты, приводимые в работе, имеют достаточно строгие математические доказательства и обоснования. Однако сами доказательства здесь не рассматривались, так как не это являлось основной целью. Отбор и характер изложения основного материала ведется здесь таким образом, чтобы, по возможности, избежать излишнего формализма, выявить содержательную, физическую сторону рассматриваемых процессов и облегчить практическое использование результатов. Кроме того, здесь делалась попытка показать разнообразие прикладных задач, которые решаются (или могут решаться) на основе рассмотренных моделей временных рядов, случайных процессов, случайных потоков событий, пространственно-временных полей и изображений.

Помимо этого, нужно отметить, что для большей наглядности изложения и удобства пользования книгой весь иллюстративный материал представлен здесь в виде отдельных схем. Эти схемы обладают определенной самостоятельностью, дают много дополнительной информации и в большинстве случаев могут рассматриваться независимо от основного текста.

В целом предлагаемая книга подготавливалась так, чтобы она могла быть полезной для тех, кто изучает, исследует и применяет на практике модели и методы анализа различных по своей физической природе случайных данных.

ВВЕДЕНИЕ

ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА ДАННЫХ

1. Одной из наиболее общих проблем в физике и технике, биологии и медицине, социологии, экономике и различных областях естествознания является проблема описания и извлечения информации из экспериментальных данных. Под термином «данные», в зависимости от конкретной области, могут пониматься самые разнообразные информационные процессы, сигналы, результаты наблюдений или измерений.

В соответствии с традиционным определением, информационные сигналы и данные – это изменения какой-либо физической величины, отражающей информацию о некотором явлении, событии, состоянии исследуемой системы или состоянии наблюдаемого объекта. Состояния реальных (не идеализированных) систем могут изменяться случайным образом, а поэтому «сигналы и данные» по самой своей сути должны рассматриваться как некоторые случайные функции.

Следовательно, если рассматривать задачи описания, обработки и анализа данных, то можно заметить, что по своему содержанию подобные задачи эквивалентны задачам описания и исследования случайных функций. Принципиально такие задачи относятся к классу статистических или вероятностных задач. Основой для решения таких задач являются теория вероятностей, теория случайных процессов и математическая статистика (схема 0.1). Теория вероятностей используется при этом для построения моделей и исследования случайных явлений, случайных событий, случайных величин. Изучение временной и пространственной структуры случайных функций, вероятностных зависимостей, различных линейных и нелинейных преобразований сигналов и данных выполняется на основе теории случайных процессов. Методы математической статистики позволяют решать задачи оптимального планирования экспериментов, задачи оценивания параметров, классификации случайных данных, распознавания образов и многие другие задачи, связанные с проблемой статистических решений и статистических выводов.

2. Приведенное общее определение информационных сигналов и данных настолько широкое, что может относиться к самым различным областям исследований. Это может быть, например, область исследования основных закономерностей материального мира, изучение процессов развития живой природы, исследование технических систем, социальных

Схема 0.1

Общая проблема обработки и анализа данных

- **Изучение физических явлений**
- **Изучение систем живой и неживой природы**
- **Исследование социальных и экономических процессов**

⇓

Наблюдения Измерения Экспериментальные исследования
Проблема извлечения информации из экспериментальных данных

⇓

Информационные процессы, сигналы, данные измерений ⇒ **Случайные функции, изменяющиеся во времени, пространстве или одновременно и во времени, и в пространстве**

- **Обработка и анализ информации**

⇓

Обработка и анализ случайных функций ⇒ **Вероятностные и статистические методы анализа**

- **Математические основы обработки и анализа данных**

Теория вероятностей ⇒ Построение и исследование моделей случайных событий, случайных величин, последовательностей случайных величин, ...

Теория случайных процессов ⇒ Построение и исследование моделей случайных функций, зависимостей, линейных и нелинейных преобразований, ...

Математическая статистика ⇒ Теория статистических выводов (планирование экспериментов, принципы оценивания параметров и принципы принятия оптимальных решений, ...)

явлений и экономических процессов. Хорошо известно также и то, что вероятностные и статистические методы анализа относятся к междисциплинарным методам. Они позволяют описывать информационные процессы, исследовать поведение сложных систем, находить оптимальные алгоритмы обработки и анализа данных независимо от их физической природы.

Все эти особенности наглядно проявляются в многообразии сформировавшихся к настоящему времени самостоятельных «статистических» направлений исследований (схема 0.2).

Схема 0.2

Некоторые самостоятельные направления исследований, в основе которых лежат статистические методы

- **Статистическая физика** [1, 2]
  Статистическая механика [3, 4]
  Статистическая термодинамика [5, 6]
  Статистическая оптика [7, 8]
  Статистическая акустооптика [9]
  Статистическая голография [10]
  Статистическая томография [11]
- **Статистическая химия** [12]
- **Статистическая ботаника** [13]
- **Статистическая геология и геофизика** [14, 15]
- **Статистическая радиофизика и радиотехника** [16, 17]
  Статистическая радиолокация [18, 19]
  Статистическая теория связи [20, 21]
  Статистическая теория антенн [22]
- **Статистическая теория управления** [23, 24]
- **Статистическая теория распознавания образов** [25, 26]
- **Статистическая теория планирования экспериментов** [27, 28]

- **Статистические методы также играют определяющую роль в развитии**

прикладной кибернетики [29], технической диагностики [30], теории надежности [31], теории массового обслуживания [32], метеорологии [33, 34], сейсмологии [35], гидрологии [36], океанологии [37], теории запасов [38], теории игр [39], биометрии [40, 41], эконометрики [42–44], теории рисковых ситуаций [45–47], логистики [48], социально-экономических исследований [49, 50] и многих других направлений

Выделенные направления исследований не являются полным перечнем областей практического применения вероятностных и статистических методов. Они отражают лишь широту и большое разнообразие задач, связанных с необходимостью построения вероятностных моделей, проблемами исследования их структуры, проблемами обработки и анализа случайных данных (наблюдений, измерений, результатов экспериментов, ...)

Само развитие и многочисленность подобных направлений исследований, с одной стороны, подтверждает, что вероятностные и статистические методы действительно полезны и эффективны в различных областях естествознания.

С другой стороны, важно заметить, что формирование самостоятельных «статистических» направлений объясняется тем, что без вероятностного подхода, без статистического рассмотрения большинство традиционных естественно-научных направлений уже просто не могут развиваться. Многие реальные практические задачи без учета случайных изменений «состояния» изучаемых процессов и систем становятся бессодержательными.

3. Обычно в общей проблеме обработки информации для формирования какой-либо самостоятельной предметной области необходимо, чтобы эта область имела:

1) свои модели процессов и систем,
2) свой круг задач,
3) свои методы решения этих задач и, конечно,
4) свою область приложения практических результатов.

Все перечисленные признаки относятся к отличительным особенностям; именно ими определяется специфика каждого направления исследований и степень его самостоятельности.

Если теперь к этим же отличительным признакам подойти с несколько иной точки зрения, то многие из них могут одновременно рассматриваться и как объединяющие признаки для общей проблематики статистического анализа информации (схема 0.3).

Действительно, модели событий, процессов и систем в физике, технике, биологии, при всем их многообразии и различии, – это все-таки вероятностные модели случайных функций. Класс решаемых задач, какой бы спецификой они ни обладали, по своему содержанию – это задачи вероятностного анализа моделей и задачи статистической обработки наблюдений. Методы решения таких задач – это методы теории случайных функций и методы математической статистики (схема 0.3).

Схема 0.3

Характерные особенности существующих направлений исследований, связанных с проблемой статистического анализа данных

- **Основные отличительные признаки самостоятельности сформировавшихся направлений**

– свои математические модели событий, процессов и систем;
– свой круг решаемых задач;
– свои методы решения этих задач;
– своя область приложения теоретических результатов.

- **Общие признаки всего многообразия существующих и формирующихся новых статистических направлений**

– **Математические модели**	⇒	Вероятностные модели случайных функций
– **Решаемые задачи**	⇒	Задачи вероятностного анализа моделей Задачи статистической обработки данных
– **Методы решения задач**	⇒	Методы теории случайных функций Методы математической статистики

И, наконец, остается еще одна характерная черта направления – область приложения результатов. Этап использования результатов тесно связан с начальным этапом исходной «содержательной» формулировки решаемой задачи. Здесь наиболее полно проявляется специфика предметной области и, конечно же, на этом этапе проявляются существенные различия физических, биологических, экономических или каких-либо других приложений. Однако даже на этом этапе, помимо использования полученных результатов в рассматриваемой конкретной области, важно оценить потенциальную полезность новых результатов в других предметных областях.

• • • Выделенные в данном разделе особенности характеризуют общее состояние и направленность исследований по проблематике статистической обработки и анализа случайных данных. С учетом этих особенностей и с учетом практической полезности результатов для различных областей физики, техники, биологии, медицины в основных главах книги отбираются и исследуются вероятностные модели случайных функций. Подобный подход к рассмотрению общей вероятностной структуры, анализу основных свойств и характеристик выбранных моделей приводит к более общим и более важным результатам по сравнению с результатами решения какой-либо отдельной самостоятельной задачи.

ЛИТЕРАТУРА К ВВЕДЕНИЮ

1. **Рейф Ф.** Статистическая физика. – М.: Наука, 1986.
2. **Климонтович Ю.Л.** Статистическая физика. – М.: Наука, 1982.
3. **Фейнман Р.** Статистическая механика. – М.: Мир, 1975.
4. **Репке Г.** Неравновесная статистическая механика. – М.: Мир, 1990.
5. **Киттель Ч.** Статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1977.
6. **Зубарев Д.Н.** Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971.
7. **Гудмен Дж.** Статистическая оптика. – М.: Мир, 1988.
8. **О'Нейл Э.** Введение в статистическую оптику. – М.: Мир, 1966.
9. **Хименко В.И., Тигин Д.В.** Статистическая акустооптика и обработка сигналов. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996.
10. **Троицкий И.Н., Устинов Н.Д.** Статистическая теория голографии. – М.: Радио и связь, 1981.
11. **Троицкий И.Н.** Статистическая теория томографии. – М.: Радио и связь, 1989.
12. **Дерффель К.** Статистика в аналитической химии. – М.: Мир, 1994.
13. **Зайцев Г.Н.** Математическая статистика в экспериментальной ботанике. – М.: Наука, 1984.
14. **Крамбейн У., Грейбилл Ф.** Статистические модели в геологии. – М.: Мир, 1969.
15. **Троян В.Н., Киселев Ю.В.** Статистические методы обработки геофизических данных. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000.
16. **Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.** Статистическая радиофизика и оптика. – М.: Физматлит, 2010.
17. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь,1982.
18. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г.П. Тартаковского. – М.: Сов. радио, 1963.
19. **Сосулин Ю.Г.** Теоретические основы радиолокации и радионавигации. – М.: Радио и связь, 1992.
20. **Миддлтон Д.** Введение в статистическую теорию связи. – М.: Сов. радио, 1961.
21. Статистическая теория связи и ее практические приложения / Под ред. Б.Р. Левина. – М.: Связь, 1979.
22. **Шифрин Я.С.** Вопросы статистической теории антенн. – М.: Сов. радио, 1970.
23. **Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г.** Основы статистической теории автоматических систем. – М.: Машиностроение, 1974.

24. **Острем К.** Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973.
25. **Фукунага К.** Введение в статистическую теорию распознавания образов. – М.: Наука, 1979.
26. Распознавание образов: состояние и перспективы / К. Верхаген, Р. Дейн, Ф. Грун и др. – М.: Радио и связь, 1985.
27. **Налимов В.В., Чернова Н.А.** Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.
28. **Джонсон Н., Лион Ф.** Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. – М.: Мир, 1980.
29. Статистические методы в прикладной кибернетике / Под ред. Р.М. Юсупова. – Л.: Мин. обороны СССР, 1980.
30. **Дмитриев А.К., Юсупов Р.М.** Идентификация и техническая диагностика. – М.: Мин. обороны СССР, 1987.
31. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983.
32. **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.** Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987.
33. **Пановский Г.А., Брайер Г.В.** Статистические методы в метеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1972.
34. **Казакевич Д.И.** Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989.
35. **Хаттон Л., Уэрдингтон М., Мейкин Дж.** Обработка сейсмических данных. – М.: Мир, 1989.
36. **Картвелишвили Н.А.** Теория вероятностных процессов в гидрологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985.
37. **Рожков В.А.** Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
38. **Прабху Н.** Стохастические процессы теории запасов. – М.: Мир, 1984.
39. **Блекуэлл Д., Гиршик М.А.** Теория игр и статистических решений. – М.: Изд-во ИЛ, 1958.
40. **Лакин Г.Ф.** Биометрия. – М.: Высшая школа, 1990.
41. **Медик В.А., Токмачев М.С., Фишман Б.Б.** Статистика в медицине и биологии. – М.: Медицина, 2000.
42. **Вербик М.** Путеводитель по современной эконометрике. – М.: Научная книга, 2008.
43. **Носко В.П.** Эконометрика. Кн. 1,2. – М.: Издательский дом «Дело», 2011.
44. **Сигел Э.** Практическая бизнес-статистика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
45. **Соложенцев Е.Д.** Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. – СПб.: Изд-во «Бизнес-пресса», 2004.

46. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. – М.: Наука, 2000.
47. **Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.** Математические основы теории риска. – М.: Физматлит, 2011.
48. **Бродецкий Г.Л.** Экономико-математические методы и модели в логистике. – М.: Академия, 2011.
49. **Васильева Э.К., Юзбашев М.М.** Выборочный метод в социально-экономической статистике. – М.: Финансы и статистика, 2010.
50. **Дубина И.Н.** Математико-статистические методы в социально-экономических исследованиях. – М.: Финансы и статистика, 2010.

ГЛАВА I

СИГНАЛЫ, ПОМЕХИ, НАБЛЮДЕНИЯ И РЕШЕНИЯ

- **Особенности получения и преобразования информации**
- **Модели обработки информационных процессов**
- **Общая классификация и примеры случайных функций**
- **Основные задачи теории принятия решений**
- **Взаимосвязь вероятностного анализа и синтеза**

По своему содержанию данная глава носит вводный характер. В ней рассматриваются особенности получения, преобразования и обработки информации. Вводятся простые обобщенные модели, и на их основе показывается, что математическое описание сигналов, помех, наблюдений и решений в задачах обработки информации, по своей сути, приводит к описанию и анализу случайных функций. Для использования такого подхода на практике в данной главе проводится общая классификация случайных функций и для каждого выделенного класса показываются примеры реальных экспериментальных данных из различных областей естествознания. В последних разделах главы выделяются особенности формулировки типовых задач обнаружения и различения сигналов, задач оценивания параметров и задач фильтрации информационных процессов. Показываются основные этапы вероятностного анализа и статистического синтеза, подчеркиваются их отличительные особенности и взаимосвязи.

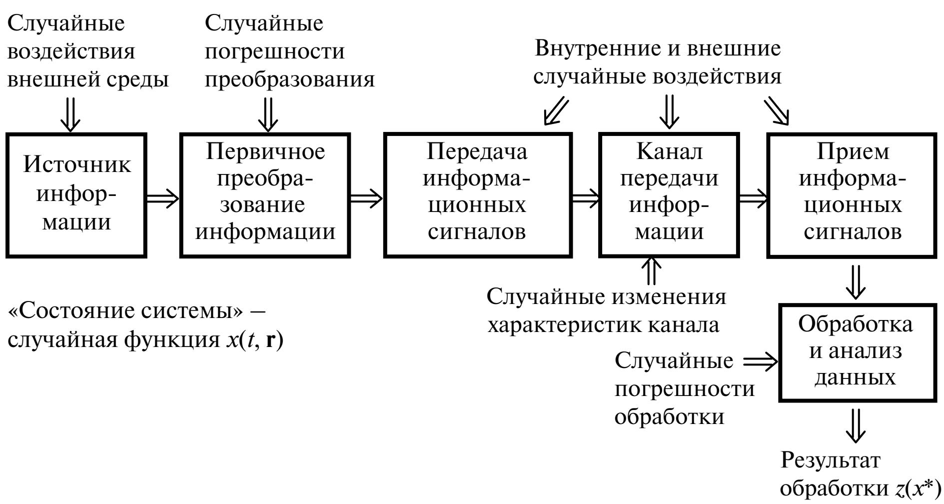
1.1. Обобщенная модель преобразования информации

Обычно все основные процедуры сбора, преобразования и обработки информации существенно зависят от содержания и конкретных условий решаемой задачи. Большое разнообразие практических задач приводит к разнообразию экспериментальных исследований, разнообразию систем обработки и анализа данных. Однако, несмотря на это, принцип получения информации и основные этапы преобразования информационных процессов условно можно представить в виде обобщенной модели (схема 1.1.1).

Такая модель включает в себя источник информации, операции первичного преобразования, передачи, приема и обработки данных. Источником информации является здесь изучаемый объект или какая-либо исследуемая система. Любая реальная (не идеализированная) система функционирует в условиях случайных внешних воздействий, параметры самой системы также могут изменяться случайным образом, и поэтому «состояние системы» должно рассматриваться как некоторая случайная функция $x(t, r)$, зависящая от времени t и координат пространства $\mathbf{r}$.

Схема 1.1.1

Обобщенная модель получения и преобразования информации



- Практическая реализация основных операций в такой модели определяется конкретным содержанием решаемых задач

Примеры источников информации

- Исследуемая система
- Физические явления
- Объекты живой и неживой природы
- Социальные и экономические процессы
- Состояние окружающей среды

Первичное преобразование информации

- Исследуемая система
- Измерительный преобразователь
- Чувствительный элемент
- Сенсорные устройства
- Датчики
- Органы чувств

Примеры каналов передачи информации

- Проводные каналы
- Радиоканалы
- Акустические каналы
- Оптические каналы
- Биологические каналы

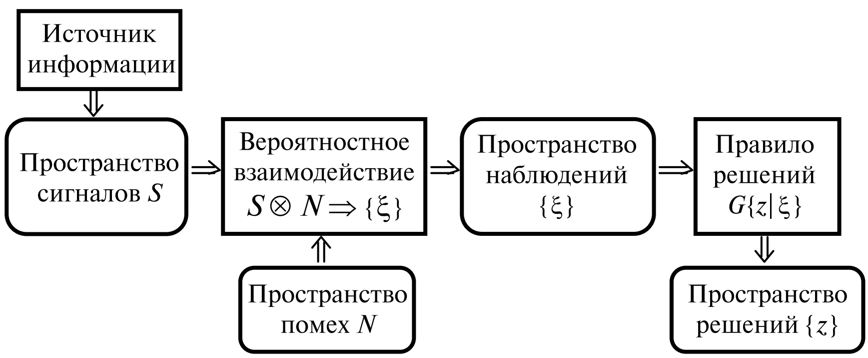
- **Приведенная модель отражает последовательность основных этапов получения, преобразования и обработки информации**
- Модель носит общий характер. Она справедлива при проведении различных экспериментальных исследований, при рассмотрении телекоммуникационных систем, описании систем мониторинга, систем технической и медицинской диагностики

Операция первичного преобразования предназначена для выделения информационных параметров или признаков, которые характеризуют состояние исследуемого объекта. Такая операция может выполняться, например, датчиками, чувствительными элементами, сенсорными устройствами. После первичного преобразования информационные сигналы передаются по каналу передачи в систему обработки и анализа данных (схема 1.1.1). Характеристики каналов передачи информации могут изменяться случайным образом в процессе работы. Практическая реализация основных преобразований всегда сопровождается некоторыми погрешностями. Кроме того, разнообразные внутренние и внешние случайные воздействия оказывают неизбежное влияние на параметры исследуемых процессов.

Все эти особенности приводят к необходимости построения вероятностных моделей для описания изучаемых систем, процессов и преобразований.

Схема 1.1.2

Обобщенная формализованная модель обработки информационных сигналов



- Такая структурная модель является обобщенным формализованным представлением основных этапов обработки информации
- Независимо от конкретной области, решение подобных задач связано с математическим описанием исследуемых систем (источников информации), описанием сигналов, помех, наблюдений и решений
- Пространство сигналов S, пространство помех N, пространство наблюдений $\{\xi\}$ и пространство решений $\{z\}$ – это, по существу, некоторые множества случайных функций. Вид этих функций определяется конкретным содержанием решаемой задачи
- Правило принятия решений $G\{z|\xi\}$ характеризует здесь процедуру выработки решения z по наблюдаемым данным ξ, то есть определяет алгоритм обработки наблюдений

Представленная на схеме 1.1.1 обобщенная структура, по своей сути, отражает «содержательную» сторону проблематики получения, преобразования и обработки информации. При решении задач обработки и анализа данных основой являются математические методы, и для их использования необходимо перейти от содержательного описания к формализованному представлению информационных процессов.

На схеме 1.1.2 показана обобщенная формализованная модель обработки информации. Такая модель полностью эквивалентна рассмотренной ранее структурной схеме и отличается лишь большей формализацией.

• • • Приведенные в данном разделе обобщенные модели позволяют на разных уровнях описывать последовательность основных операций получения, преобразования и обработки информационных процессов. Такое описание может выполняться на этапах содержательной постановки задач, когда основные узлы структурной модели (схема 1.1.1) конкретизируются в соответствии с исследуемой системой или исследуемым источником информации. Может выполняться такое описание и на этапах формализованного представления решаемых задач, когда обобщенная модель (схема 1.1.2) не зависит от физической природы рассматриваемых систем и исследуемых информационных процессов.

1.2. Определение и общая классификация случайных функций

Обобщенные модели преобразования и обработки информации (п. 1.1) достаточно наглядно подтверждают, что математическое описание динамических систем, информационных процессов и помеховых воздействий должно выполняться на основе теории случайных функций. Для того чтобы воспользоваться этой теорией, целесообразно прежде всего дать общее определение случайной функции и рассмотреть возможность предварительной «грубой» классификации таких функций. Подобный подход позволяет выделить основные классы вероятностных моделей и привести характерные примеры их практического использования.

В наиболее общем виде случайная функция формально определяется как семейство случайных переменных:

$$\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\},$$

в котором s – параметр, X – пространство состояний переменной ξ, S – множество возможных значений параметра s. Если из рассматриваемого семейства $\{\xi(s)\}$ выбрать лишь одну функцию $\xi(s)$, то такую функцию $\xi(s)$ принято называть выборочной функцией или отдельной реализацией.

Классификация случайных функций, как и любая классификация, существенно зависит от целей и содержания решаемых задач. Она может выполняться различными способами и по самым различным признакам. На данном этапе за основу классификации удобно взять общее определение случайной функции $\{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ и путем конкретизации множеств X и S разделить все многообразие функций $\{\xi(s)\}$ на самостоятельные классы (схема 1.2.1).

Разделение случайных функций $\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ по виду пространства состояний X и виду параметрического множества S сразу же разделяет эти функции и по характерному виду их реализаций $\{\xi(s)\}$. В задачах обработки и анализа информации такое деление необходимо, так как от вида реализаций существенно зависят и сами методы анализа.

Выделим здесь несколько основных классов случайных функций (схема 1.2.2), модели которых наиболее часто используются в практических приложениях [20, 59].

Схема 1.2.1

Принцип общей классификации случайных функций

- **Общее определение случайной функции**

$\{\xi(s)\} = \{\xi(s), \xi \in X, s \in S\}$ – семейство случайных переменных $\xi(s)$,

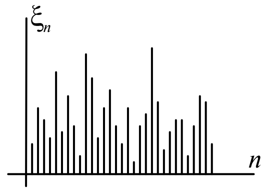
где X – пространство (или множество) состояний переменной $\xi(...)$
s – параметр, от которого зависит $\xi(...)$
S – множество значений параметра s

• **Принцип общей классификации** ⟹	Конкретизация множеств X и S приводит к разделению случайных функций на самостоятельные классы
• **Признаки классификации** ⟹	Дискретность или непрерывность пространства X Дискретность или непрерывность множества S Размерность пространства состояний X Размерность множества параметров S
• **Примеры самостоятельных классов случайных функций** ⟹	Дискретные и непрерывные, скалярные и векторные случайные последовательности, случайные процессы и случайные поля

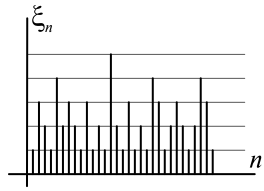
Схема 1.2.2

**Характерный вид реализаций
различных классов случайных функций**

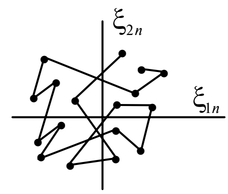
- **Случайные последовательности**



Непрерывная

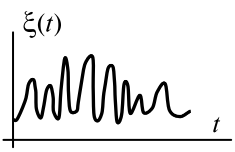


Дискретная

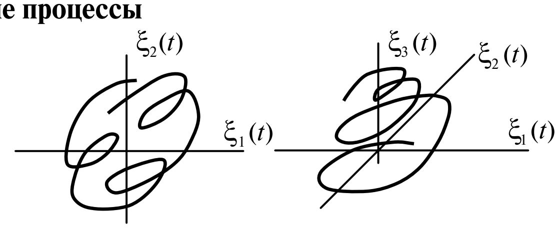


Непрерывная векторная
(двумерная)

- **Непрерывные случайные процессы**

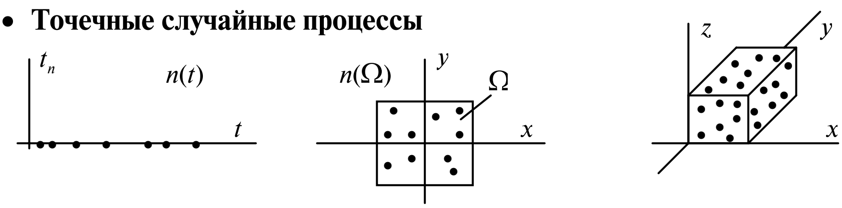


Скалярный процесс



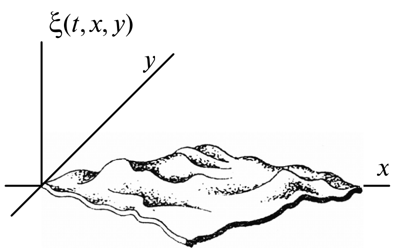
Векторные процессы
(двумерный и трехмерный)

- **Точечные случайные процессы**



Случайные потоки однородных событий
(во времени, на плоскости, в пространстве)

- **Случайные поля**



Реализация непрерывного
пространственно-временного
случайного поля

1. Случайные последовательности и временные ряды

Предположим, что в определении случайной функции $\{\xi(s),\ \xi \in X,$ $s \in S\}$ пространство состояний X является непрерывным скалярным множеством, параметр s представляет собой время, а параметрическое множество S – дискретное, то есть $s = t$ – время, $S = T = \{t_n, n = 0, 1, 2, ...\}$. Для случайной функции удобно при этом использовать обозначение $\{\xi(s)\} = \{\xi(t_n)\} = \{\xi_n\}$, где $n = 0, 1, 2, ...$. Называется такая функция непрерывной случайной последовательностью. В некоторых задачах ее называют также временным рядом или непрерывным случайным процессом с дискретным временем. Обычно в данном определении считается, что $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ и $\Delta t = t_i - t_{i-1} = const$ при любых $i = 1, 2, ... , m$.

Если предположить здесь, что пространство состояний X не непрерывное, а дискретное множество, то функция $\{\xi_n\}$ будет называться дискретной случайной последовательностью.

В более общей ситуации можно рассматривать векторную последовательность $\{\xi_n\} = \{\xi_{1n}, \xi_{2n}, ... , \xi_{qn}\}$, каждая компонента которой ξ_{jn}, $j = 1, 2, ... , q$ сама является непрерывной или дискретной случайной функцией. В качестве иллюстрации на схеме 1.2.2 показан характерный вид реализаций наиболее распространенных типов случайных последовательностей.

2. Непрерывные случайные процессы

Если теперь предположить, что в общем определении случайной функции $\{\xi(s)\} = \{\xi(s), \xi \in X, s \in S\}$ параметр $s = t$ – время, а пространство состояний X и параметрическое множество $S = T$ являются непрерывными множествами, то полученная функция $\{\xi(t)\} = \{\xi(t), \xi \in X, t \in T\}$ будет соответствовать определению непрерывного случайного процесса. Как правило, T представляет собой некоторый интервал временной оси, то есть $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$. Значения случайных переменных $\xi(t)$ могут быть при этом либо действительными (скалярными), либо комплексными, либо векторными. Соответственно, и исследуемые процессы будут называться скалярными, комплексными или векторными случайными процессами. На схеме 1.2.2 показан характер реализаций скалярного непрерывного случайного процесса $\xi(t)$, векторного двумерного $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) = (\xi_x(t), \xi_y(t))$ и векторного трехмерного процесса $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)) = (\xi_x(t), \xi_y(t), \xi_z(t))$. Составляющие компоненты $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ могут здесь рассматриваться как зависимые или независимые непрерывные скалярные случайные процессы.

3. Случайные точечные процессы и потоки событий

Точечные процессы представляют собой такую математическую модель, в которой пространство состояний X – это дискретное множество точек. Обычно каждой точке ставится в соответствие какое-либо событие, и тогда пространство X интерпретируется как дискретное множество однородных событий. Если события происходят во времени, то параметр $s = t$, $t \in T$ и случайный процесс $\xi(t)$ эквивалентен последовательности точек $\{t_n, n = 1, 2, ...\}$, соответствующих случайным моментам t_1, t_2, ... появления событий. Такие процессы обычно называются случайными потоками однородных событий. Описание последовательности событий $\{t_n\}$, $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ во многих задачах может быть выполнено и как описание целочисленного случайного процесса $\{n(t)\}$, характеризующего число $n(t)$ событий (точек) на текущем интервале времени $[0, t)$.

Модели точечных процессов допускают различные обобщения. Так, например, случайное множество точек можно рассматривать не только на временной оси $[0, t)$, но и на плоскости (x, y) или в каком-либо пространстве (x, y, z). В зависимости от содержания решаемых задач, подобные модели могут рассматриваться как случайные точечные процессы или, в более общей ситуации, как случайные точечные поля, изменяющиеся и во времени, и в пространстве (схема 1.2.2).

4. Случайные поля

Если в общем определении случайной функции $\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ параметрическое множество S имеет размерность $\mathrm{k} \geq 2$, то такая функция называется случайным полем. В практических приложениях наибольший интерес обычно представляют пространственно-временные поля $\{\xi(t, r)\}$, для которых случайные переменные $\xi(t, r)$ зависят от времени t и координат r пространства (x, y, z). Налагая определенные ограничения на пространство состояний X случайной функции $\{\xi(t, r)\}$, можно выделить классы непрерывных и дискретных, скалярных и векторных случайных полей.

На схеме 1.2.2 показан характер реализации наиболее простого непрерывного пространственно-временного случайного поля $\xi(t, x, y)$.

• • • Конечно, следует подчеркнуть, что выделенные классы случайных функций не охватывают всего многообразия существующих типов вероятностных моделей. Однако подобная классификация разделяет случайные функции по виду их реализаций. Это позволяет частично систематизировать и обобщить различные по своему содержанию приложения теории случайных функций для задач обработки и анализа информационных процессов.

1.3. Многообразие случайных функций в прикладных задачах

Определение и общая классификация случайных функций, приведенные в п. 1.2, относятся к формализованным представлениям. Такой подход необходим для математического описания исследуемых систем и привлечения общих методов теории случайных процессов к решению задач обработки и анализа данных.

Если же говорить о содержательной стороне исследований, то нужно заметить, что и физическая интерпретация, и характер поведения отдельных реализаций случайных функций могут быть весьма разнообразными. Зависит это от рассматриваемой области и конкретного содержания решаемой задачи.

Приведем здесь некоторые примеры случайных функций, характерных для различных областей физических, технических, медико-биологических исследований. Разделение на самостоятельные классы будем при этом проводить в соответствии с общей классификацией, предложенной в п. 1.2.

1. Примеры простых случайных последовательностей

Обычно случайные последовательности можно интерпретировать следующим образом. При исследовании некоторой сложной системы или при изучении протекающих процессов проводятся измерения какого-либо параметра – например, измеряется температура, давление, значение биопотенциалов, значения скорости, ускорения, ... Измерения проводятся в дискретные моменты времени t_1, t_2, t_3, ... через равные интервалы Δt. В результате таких измерений получается последовательность наблюдений $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, $\xi(t_3)$ ... или, в более простой форме записи, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... Если при этом измеряемый параметр $\xi(t)$ меняется непрерывно во времени, то получаемая последовательность ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... относится к классу непрерывных случайных последовательностей. Если же исследуемый параметр или процедура регистрации имеют дискретный характер, то и случайная последовательность будет относиться к классу дискретных.

В качестве примера на схеме 1.3.1 показаны экспериментальные результаты нескольких различных по своему содержанию исследований. При построении математических моделей и при решении задач обработки и анализа данных все подобные результаты (независимо от физической природы изучаемых процессов) могут исследоваться на основе теории случайных последовательностей или случайных временных рядов.

2. Примеры непрерывных случайных процессов

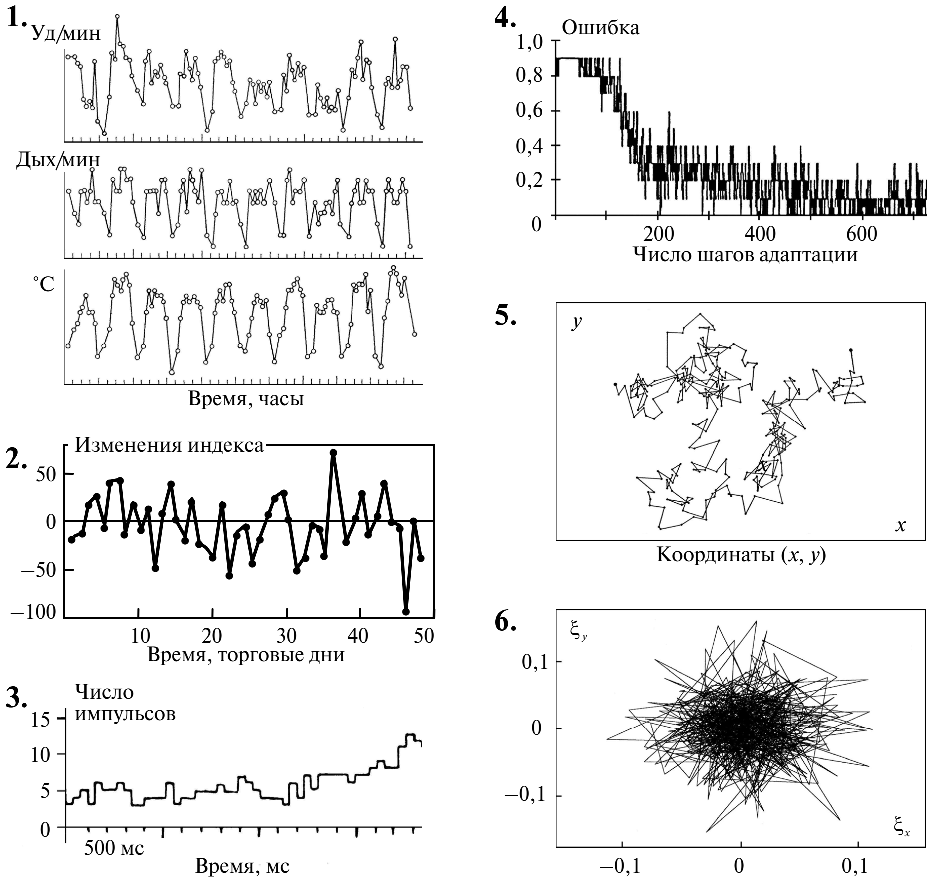
Большинство исследуемых природных явлений и процессов относятся к процессам, протекающим непрерывно во времени. Принципиально они могут рассматриваться как некоторые непрерывные функции времени $\xi(t)$. Если такие процессы наблюдаются (регистрируются) непрерывно на некотором временном интервале $[t_0, t_0 + T] = [0, T]$ длительностью T, то в результате наблюдения получается реализация или траектория, или выборочная функция исследуемого процесса $\xi(t)$, $t \in T$.

На схеме 1.3.2 и 1.3.3 показаны примеры нескольких различных реализаций, которые, по своей сути, могут описываться и анализироваться как реализации непрерывных случайных процессов.

Схема 1.3.1

Примеры простых случайных последовательностей

- **Результаты различных по своему содержанию экспериментальных исследований**



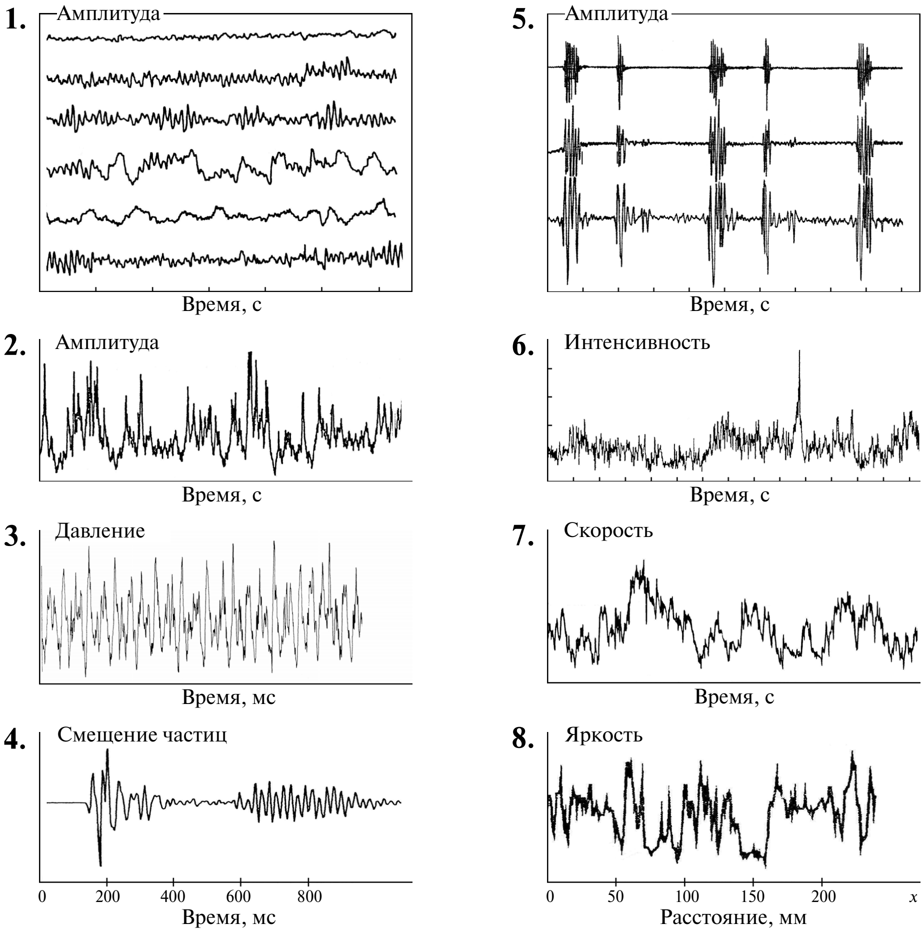
- **Все приведенные здесь реализации случайных функций относятся к классу случайных последовательностей: непрерывных (1, 2), дискретных (3, 4), непрерывных векторных (5, 6)**

1 – Временные изменения трех функциональных показателей организма человека на протяжении 10 суток (изменения частоты пульса, частоты дыхания и подъязычной температуры)
2 – Суточные изменения промышленного индекса Доу-Джонса
3 – Исследование активности нейронов зрительной коры
4 – Процесс адаптации системы автоматического управления
5 – Положение частицы через равные интервалы времени при броуновском движении
6 – Погрешности пространственного наведения лазерного пучка

Схема 1.3.2

Примеры непрерывных случайных процессов

- **Отдельные результаты экспериментальных исследований**



- **Приведенные реализации случайных функций относятся к классу одномерных непрерывных случайных процессов**

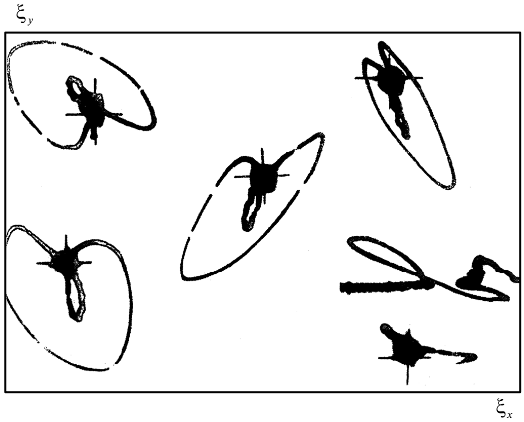
1 – Характерный вид биопотенциалов коры головного мозга при различных функциональных состояниях человека
2 – Амплитуда замирания радиосигнала на спутниковых трассах Земля–Космос
3 – Амплитуда изменения давления на фюзеляже винтового самолета
4 – Сейсмическое колебание при глубинном зондировании
5 – Характерный вид фонокардиограммы в трех частотных диапазонах для здорового человека
6 – Интенсивность рентгеновского излучения от космических объектов
7 – Горизонтальная скорость ветра, измеренная на фиксированной высоте от земли
8 – Изменения яркости отдельной строки оптического изображения

Схема 1.3.3

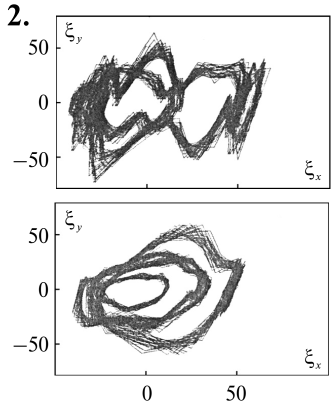
Примеры непрерывных векторных процессов

- **Отдельные результаты экспериментальных исследований**

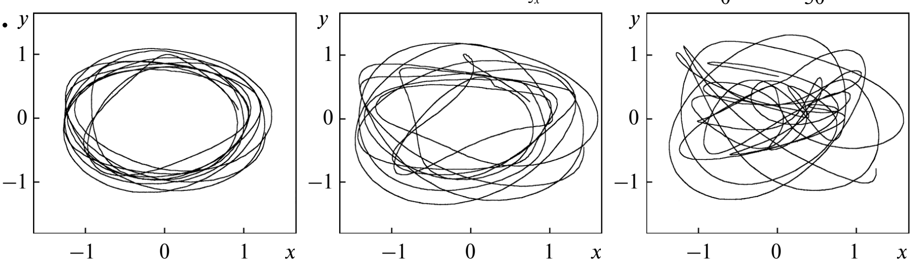
1.



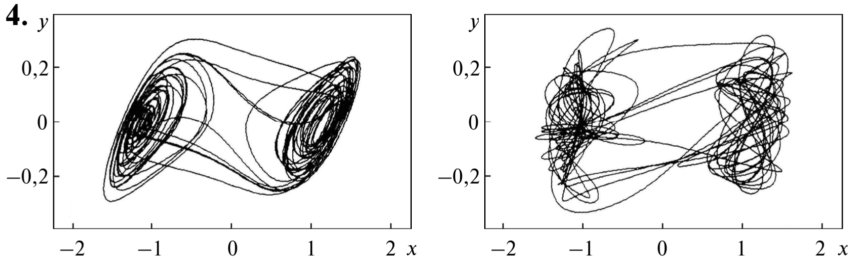
2.



3.



4.



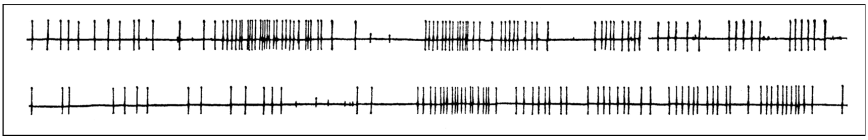
- **Приведенные реализации случайных функций относятся к классу двумерных непрерывных случайных процессов**

1 – Исследования электрической активности сердца методами векторкардиографии
2 – Характер фазовых портретов отдельных фонем речевого сигнала
3 – Совместное поведение двух динамических систем при различных режимах синхронизации
4 – Фазовые портреты генератора хаотических колебаний, работающего в режиме с переключением

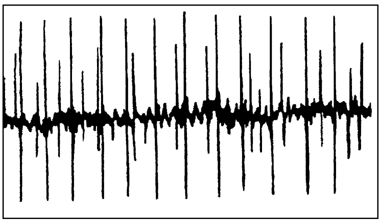
Схема 1.3.4

Примеры случайных потоков однородных событий

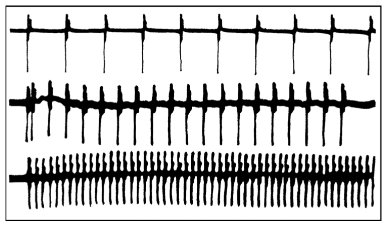
- **Отдельные результаты экспериментальных исследований**

1.


Время, мс

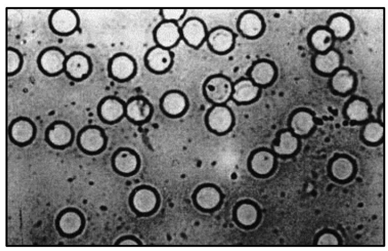
2.


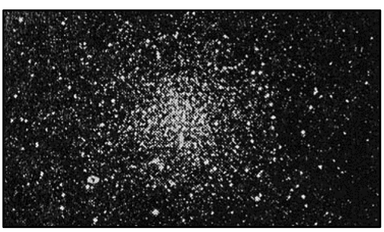
Время

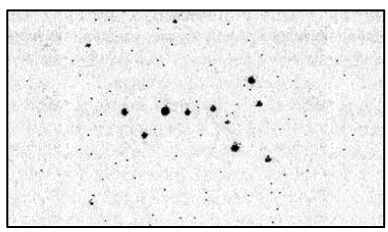
3.


Время

4.


5.


6.


7.


- **Приведенные реализации случайных функций могут рассматриваться как случайные потоки однородных событий во времени (1, 2, 3) или в пространстве (4, 5, 6, 7)**

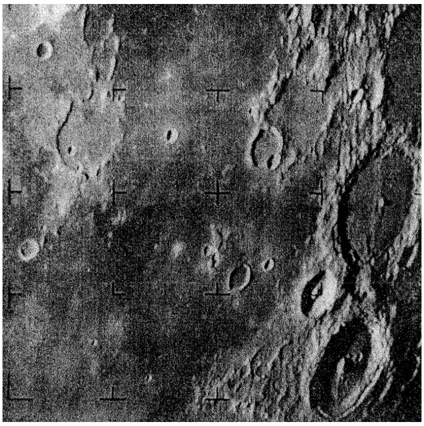
1 – Исследование импульсной активности нейронов
2 – Характерный вид электромиограммы
3 – Регистрация мышечных потенциалов действия в электрофизиологии
4 – Исследование числа хромосом в клетке человека
5 – Регистрация эритроцитов при анализе состава крови
6 – Наблюдение одного из звездных скоплений, расположенных вблизи Млечного Пути
7 – Регистрация точечных объектов при локационном наблюдении

Схема 1.3.5

Примеры случайных пространственно-временных полей

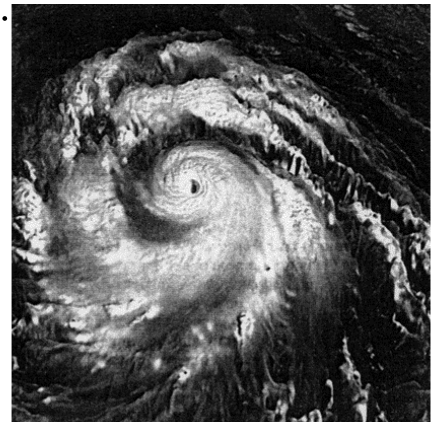
- **Отдельные результаты экспериментальных исследований**

1.



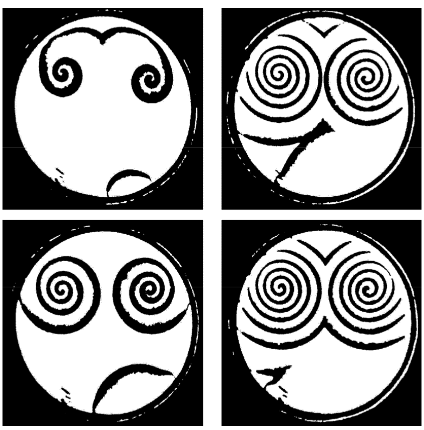
Лунная поверхность

2.



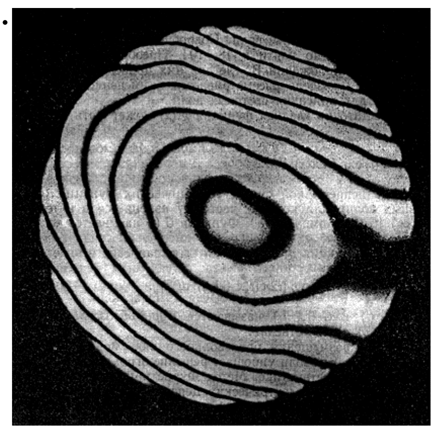
Ураган «Линда»

3.



Фазы реакции Белоусова – Жаботинского

4.



Интерференционные полосы

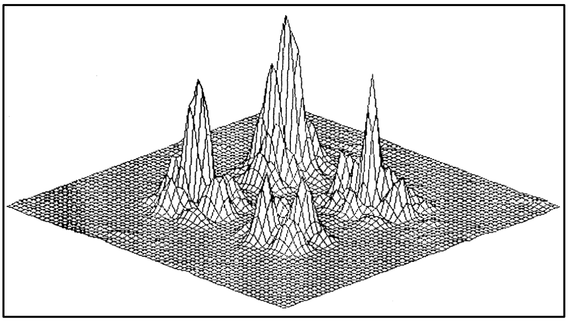
- **Характерной особенностью приведенных реализаций является здесь то, что исследуемые случайные функции зависят от выбранного момента времени и координат пространства**

1 – Изображение лунной поверхности, переданное космическим аппаратом
2 – Регистрация со спутника NASA динамики урагана Линда
3 – Отдельные фазы колебательной химической реакции Белоусова – Жаботинского
4 – Интерференционные полосы, формируемые при сложении двух сферических волн

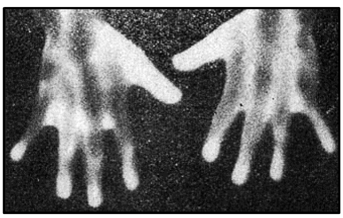
Схема 1.3.6

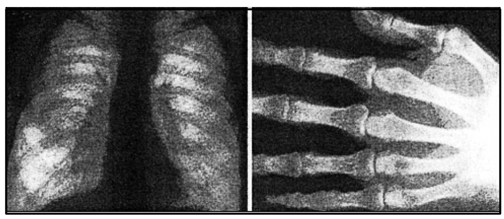
Примеры случайных пространственно-временных полей

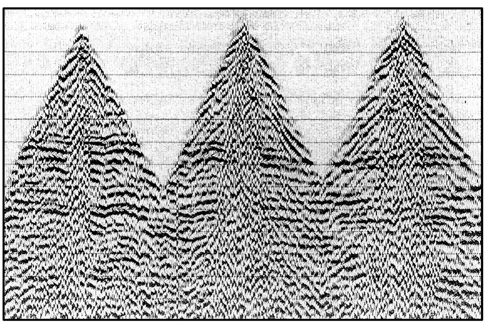
- **Отдельные результаты экспериментальных исследований**

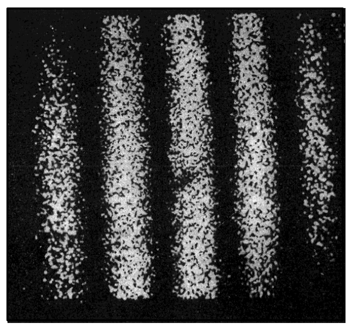
1.


2.


3.


4.


5.


6.


- **Все приведенные на схеме 1.3.5 и 1.3.6 реализации случайных функций относятся к классу пространственно-временных полей**

1 – Распределение интенсивности оптического изображения
2 – Изображение отпечатка пальца
3 – Термографическое изображение верхних конечностей здорового человека
4 – Характерный вид рентгенографических изображений
5 – Запись трех сейсмограмм, полученных методом отраженных волн
6 – Спекл-эффекты (зернистая структура изображения) в лазерной голографии

3. Примеры случайных точечных процессов

Необходимость рассмотрения случайных точечных процессов обычно возникает при исследованиях случайных потоков однородных событий. В зависимости от конкретно решаемой задачи содержательная интерпретация потоков событий может быть весьма разнообразна. Это могут быть, например, потоки однородных импульсов в радиолокационных системах, случайные потоки импульсов в нейронных сетях, случайные потоки отказа аппаратуры, потоки заявок в системах массового обслуживания, потоки импульсных воздействий в системах управления. Все подобные примеры относятся к исследованиям однородных событий, происходящих последовательно одно за другим в некоторые случайные моменты времени. Если потоки однородных событий изменяются не только во времени, но и в пространстве, то для их описания и анализа могут использоваться модели пространственно-временных потоков или модели точечных пространственно-временных случайных полей.

На схеме 1.3.4 показано несколько характерных примеров, относящихся к исследованиям случайных потоков однородных событий.

4. Примеры случайных полей

Принципиальной особенностью случайных полей, с точки зрения общей теории случайных функций, является то, что они относятся к функциям, зависящим от нескольких аргументов. Если, например, это пространственно-временные поля, то исследуемая функция ы$\xi(t, r)$ изменяется одновременно и во времени, и в пространстве, т. е. ее значения зависят от выбранного момента времени t и от координат (x, y, z) пространства r.

Наиболее распространенными примерами появления таких функций являются результаты исследования оптических изображений, анализ взволнованных и шероховатых поверхностей, анализ изображений в рентгенографии, ультразвуковых исследованиях, электронной микроскопии, голографии, томографии.

Несколько характерных примеров экспериментальных результатов, относящихся к анализу пространственно-временных случайных полей, приведены на схеме 1.3.5 и 1.3.6.

1.4. Типовые задачи теории статистических решений

Задачи, связанные с обработкой информации, чрезвычайно разнообразны по своему содержанию. К ним, в частности, относятся задачи обнаружения информационных сигналов, задачи распознавания образов, различения и классификации данных, задачи оценивания параметров, задачи прогноза состояния исследуемых объектов, задачи оптимального управления процессами и динамическими системами, задачи функ-

Схема 1.4.1

Общая схема обработки информации

- **Процедура обработки и анализа данных при формализованном представлении описывает переход от пространства наблюдений к пространству решений**

- Правило принятия решений $G\{z|\xi\}$ задает алгоритм обработки наблюдаемых данных
- **Обобщенная модель не зависит от физической природы исследуемых процессов. Она справедлива при обработке информации в различных системах живой и неживой природы**

циональной, структурной и параметрической идентификации изучаемых объектов и сред.

Все подобные задачи обладают своей спецификой, их решения зависят от конкретных условий, исходных данных, целей и критериев оптимальности. Вместе с тем при математической формализации большинство перечисленных задач могут быть систематизированы и описаны в терминах общей статистической теории принятия решений. Если воспользоваться таким подходом, то сама процедура обработки и анализа данных, в соответствии с обобщенной моделью обработки (схема 1.1.2), может рассматриваться как процедура перехода от некоторого пространства наблюдений $\{\xi\}$ к некоторому пространству решений $\{z\}$. Такой переход $\{\xi\} \Rightarrow \{z\}$ выполняется на основе определенного правила решений $G\{\xi|z\}$, которое, по своей сути, задает алгоритм обработки данных (схема 1.4.1).

Приведенная модель носит достаточно общий характер. На ее основе можно рассматривать задачи обработки информации в физике и технике, биологии и медицине, социологии и экономике. Выделим здесь некоторые особенности конкретизации такой модели применительно к типовым задачам теории статистических решений [45, 54, 67].

1. Задачи классификации, различения, обнаружения

Процедуры классификации, обнаружения, различения по своему содержанию состоят в том, чтобы по наблюдаемым данным (объектам, сигналам, измерениям, признакам, ...) вынести решение о принадлежности их к тому или иному классу. Предположим, например, что на некотором интервале времени $t \in [t_0,\ t_0 + T] = [0,\ T]$ длительностью T наблюдению доступна реализация $\xi(t)$, $t \in [0,\ T]$ исследуемого случайного процесса $\xi(t)$. Известно, что этот процесс может принадлежать одному из m классов:

$$\xi(t) = \xi_i(t) = \mathrm{s}_i(t) \otimes n(t),\ i = 1, 2, \dots , m,$$

где $s_i(t)$ – полезные информационные компоненты или информационные сигналы, $n(t)$ – случайные помеховые воздействия, а символ $\otimes$ отражает операцию взаимодействия сигнала с помехой (сложение, перемножение, ...).

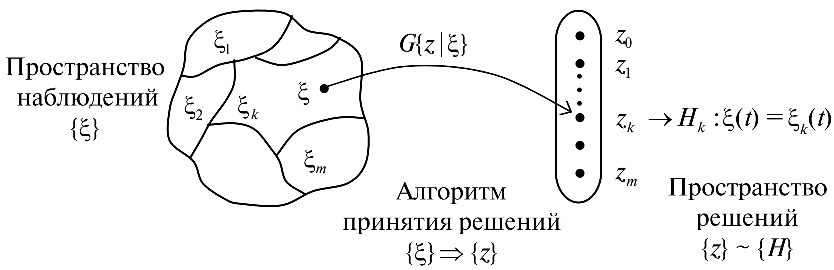
Задача состоит при этом в определении класса i, к которому относится наблюдаемая реализация $\xi(t)$. Все подобные задачи в теории статистических решений формулируются как задачи проверки статистических гипотез. При этом для гипотез вводятся обозначения H_0, H_1, H_2, ... , H_m и

Схема 1.4.2

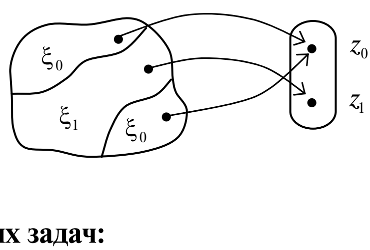
Обобщенные модели типовых задач обработки информации

- **Задачи классификации, различения и обнаружения**

По своему содержанию такие задачи эквивалентны задачам проверки статистических гипотез



- **Модель задачи обнаружения**



Примеры подобных задач:

- задачи различения сигналов в системах передачи информации
- задачи классификации состояний в технической и медицинской диагностике
- задачи обнаружения и распознавания целей в радиолокации
- задачи распознавания речевых сигналов
- задачи классификации данных и распознавания образов

предполагается, что гипотеза H_0 соответствует ситуации, когда в наблюдаемом процессе $\xi(t)$ отсутствует полезная информационная составляющая, а гипотеза H_i отражает присутствие полезного сигнала i-го класса, то есть:

$$H_0 : \xi(t) = n(t),$$
$$H_i : \xi(t) = \xi_i(t) = \mathrm{s}_i(t) \otimes n(t),\ i = \overline{1, m}\ .$$

В результате обработки реализации $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ требуется принять одно из возможных решений z_k, то есть принять одну из $(m + 1)$ рассматриваемых гипотез H_k, и отклонить остальные гипотезы H_i, $i \neq k$. Обобщенная модель такой задачи показана на схеме 1.4.2.

Если рассмотреть наиболее простую ситуацию, когда проверяется лишь две гипотезы:

$$H_0 : \xi(t) = n(t),$$
$$H_1 : \xi(t) = \mathrm{s}(t) \otimes n(t),$$

то формулировка задачи классификации или различения переходит в формулировку задачи обнаружения информационного сигнала $s(t)$ на фоне мешающих помех $n(t)$.

Нужно заметить, что при формулировке подобных задач (схема 1.4.2) в качестве пространства наблюдений $\{\xi\}$ и информационных сигналов могут рассматриваться различные множества случайных функций – случайные величины, случайные последовательности, случайные процессы или случайные поля. Зависит это от содержательной постановки задач и от конкретных математических моделей, используемых для описания информационных процессов.

2. Задачи оценивания параметров

Состояние исследуемых динамических систем, характер изучаемых явлений и процессов, результаты экспериментальных исследований – все это обычно описывается совокупностью некоторых параметров α_1, α_2, ... , α_m. Измерения таких параметров всегда сопровождаются случайными внешними и внутренними помехами, неизбежными погрешностями, флуктуациями, случайными ошибками. Именно поэтому задачи измерения по своему содержанию являются статистическими и формулируются как задачи оценивания параметров.

Предположим, что исследуется некоторый случайный процесс $\xi(t)$, который представляет собой смесь информационной компоненты – сигнала $s(t, \alpha)$ и случайной помехи $n(t)$. На интервале времени $t \in [0, T]$ длительностью T наблюдению доступна реализация процесса:

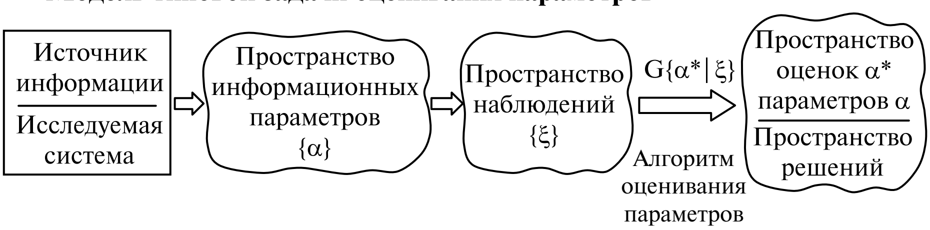
$$\xi(t) = s(t, \alpha) \otimes n(t),\ t \in [0, T],$$

где $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$ – вектор неизвестных параметров. Задача оценивания формулируется при этом как задача нахождения наилучшей оценки α^* вектора параметров α. Определение «наилучшей» понимается здесь в смысле некоторого заданного по условиям задачи критерия качества. Упрощенная модель такой задачи показана на схеме 1.4.3.

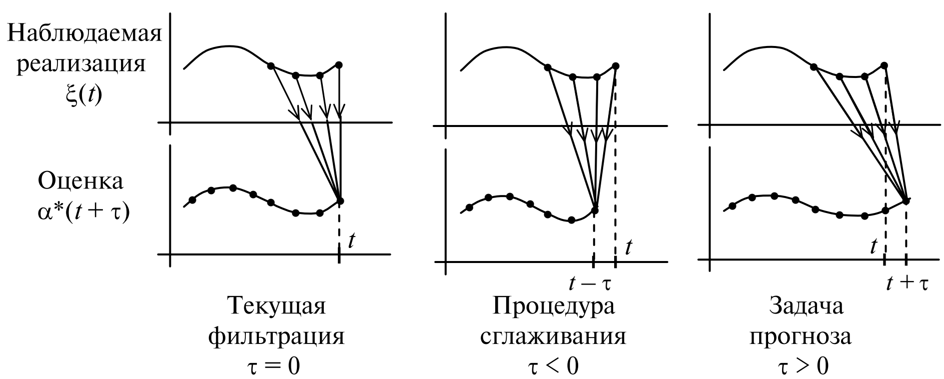
Схема 1.4.3

Характерные особенности задач оценивания параметров и задач фильтрации

- **Модель типовой задачи оценивания параметров**



- Примерами подобных задач могут служить самые разнообразные задачи экспериментальных исследований и наблюдений, связанные с измерениями каких-либо физических величин
- **В задачах оценивания параметров** предполагается, что на интервале наблюдения измеряемые значения параметров остаются постоянными
- **Особенности задач фильтрации**



- **В задачах фильтрации** предполагается, что информационные параметры изменяются во времени
- **Типовыми примерами подобных задач** являются задачи автоматического слежения, наведения, задачи оптимального прогноза состояния сложных динамических систем

3. Задачи фильтрации, интерполяции, прогноза

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исследуемый случайный процесс $\xi(t)$ содержит информационную составляющую $s(t, \alpha(t))$ и помеховую составляющую $n(t)$:

$$\xi(t) = s(t, \alpha(t)) \otimes n(t),$$

причем, в отличие от предыдущей задачи оценивания, будем считать, что полезная компонента $s(t, \alpha(t))$ является функцией времени t и зависит от совокупности некоторых информационных параметров $\alpha(t) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t)]$, которые также изменяются во времени.

В подобной ситуации для оценивания вектора неизвестных параметров $\alpha(t)$ может быть сформулирована общая задача фильтрации. При ее постановке предполагается, что исследуемый процесс $\xi(t)$ наблюдается на текущем интервале времени $[0, t)$, и требуется получить оптимальную (в смысле выбранного критерия) оценку $\alpha(t + \delta)$.

В зависимости от введенного временного сдвига δ здесь возможны три различных варианта задач (схема 1.4.3):

- при $\delta = 0$ – данная задача соответствует текущей фильтрации;
- при $\delta < 0$ – задача соответствует фильтрации с запаздыванием, или задаче интерполяции, или задаче сглаживания;
- при $\delta > 0$ – задача фильтрации переходит в фильтрацию с упреждением, или задачу экстраполяции, или задачу прогнозирования.

Приведенная формулировка основных задач показывает, что задача фильтрации и задача оценивания параметров достаточно близки по своему содержанию. Основные различия заключаются здесь в том, что процедура оценивания параметров рассматривается в предположении фиксированного интервала наблюдения $[0, T]$ и в предположении, что параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ исследуемого процесса $\xi(t)$ за время наблюдения $[0, T]$ не успевают существенно измениться. В задачах фильтрации подобные условия не ставятся, параметры $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ исследуемого процесса $\xi(t)$ могут изменяться на интервале наблюдения, и поэтому обработка данных ведется в реальном масштабе времени на текущем интервале $[0, t)$.

• • • Сформулированные в данном разделе задачи относятся к классу типовых задач теории статистических решений. По своему содержанию они охватывают большинство задач, связанных с обработкой и анализом данных. Вместе с тем существуют и различные обобщения или разновидности рассмотренных формулировок. Так, например, могут быть сформулированы задачи совместного обнаружения и различения, задачи совместного различения и оценивания параметров.

1.5. Вероятностный анализ и синтез алгоритмов

Все основные задачи обработки информации обычно формулируются в терминах теории статистических решений. Обобщенная модель обработки (схемы 1.1.2 и 1.4.1) показывает, что сама процедура принятия решений определяется алгоритмом обработки или правилом решений $G\{\xi|z\}$ – правилом перехода от пространства наблюдений $\{\xi\}$ к пространству решений $\{z\}$. В свою очередь, для нахождения алгоритмов обработки и исследования их основных свойств необходимо решать самостоятельные задачи вероятностного анализа и статистического синтеза.

1. При формулировке задач синтеза предполагается, что известны необходимые априорные данные о вероятностных свойствах сигналов, помех и их взаимодействиях. Кроме того, задаются некоторые желаемые свойства алгоритмов, и в результате синтеза необходимо определить структуру самого алгоритма обработки.

Такие задачи связаны с принципами оптимизации, и, следовательно, синтезированные алгоритмы должны удовлетворять определенному критерию качества. Выбор критерия проводится в соответствии с физическим смыслом и целевой направленностью конкретно решаемой задачи. Чем больше априорных данных известно, тем проще и точнее решаются проблемы синтеза. Основным результатом решения задач синтеза является оптимальный (в смысле выбранного критерия) алгоритм обработки наблюдений.

В большинстве случаев синтез выполняется без учета возможностей практической реализации алгоритмов, и поэтому далеко не всегда удается точно реализовать синтезированный оптимальный алгоритм обработки. Причинами здесь могут быть и чрезмерная сложность оптимального алгоритма, и отсутствие технических средств, которые адекватно осуществляют требуемые математические операции. Вопрос о возможностях точной или приближенной реализации синтезированных алгоритмов, как правило, должен рассматриваться самостоятельно в каждой конкретной задаче.

2. Проблемы вероятностного анализа обычно возникают на этапе предварительного исследования статистических свойств информационных процессов, при построении и анализе вероятностных моделей сигналов и помех, при исследовании различных линейных и нелинейных преобразований случайных функций. На основе методов вероятностного анализа исследуется качество или эффективность синтезированных алгоритмов, определяются потенциально достижимые характеристики, оцениваются возможности подоптимальных вариантов реализации, исследуются вопросы устойчивости и чувствительности алгоритмов обработки к отклонениям от заданных априорных данных.

Схема 1.5.1

Основные этапы построения систем обработки информации

- **Определение алгоритмов обработки информации и исследование их основных свойств связано с решением задач статистического синтеза и задач вероятностного анализа**

- Формулировка основных задач обработки информации
- Исследование статистических свойств сигналов и помех
- Построение вероятностных моделей

На данном этапе используются общие методы вероятностного анализа

⇓ **Цели обработки. Априорные данные. Вероятностные модели**

Критерий оптимальности ⇒

Статистический синтез оптимального алгоритма обработки информации

Используются общие методы статистического синтеза

Совокупность ограничений на класс допустимых систем ⇒

⇓ Структура оптимального алгоритма обработки информации

Вероятностный анализ качества оптимальной обработки

Используются общие методы вероятностного анализа

⇓ Характеристики оптимального алгоритма

Вопросы практической реализации алгоритмов и выбор подоптимальных вариантов

⇓ Структура подоптимального практически реализуемого алгоритма

- Вероятностный анализ выбранного алгоритма обработки
- Сравнение с оптимальным алгоритмом
- Исследование устойчивости алгоритма к изменениям априорных данных

Используются общие методы вероятностного анализа

⇓ Характеристики подоптимального алгоритма. Степень их отличия от потенциально достижимых

- Техническая реализация системы
- Экспериментальные исследования

⇓ **Система обработки информации. Основные рабочие характеристики**

Для наглядности на схеме 1.5.1 показана последовательность основных этапов построения произвольной системы обработки информации. Из нее, в частности, видна взаимосвязь задач статистического синтеза и вероятностного анализа. Основные методы синтеза и анализа являются здесь достаточно общими, они не зависят от физической природы исследуемых процессов и не зависят от принципов технической реализации алгоритмов.

Заключение

В данной главе рассмотрена обобщенная модель получения, преобразования и обработки информации, показаны особенности общей классификации случайных функций и приведены конкретные примеры экспериментальных данных, отражающих многообразие случайных функций в прикладных задачах обработки и анализа информационных процессов. Рассмотрена формализованная постановка наиболее распространенных задач теории статистических решений, показана последовательность основных этапов вероятностного анализа и статистического синтеза алгоритмов.

В целом, на основе представленных в данной главе результатов можно сделать некоторые общие выводы.

• При исследовании информационных процессов все основные этапы получения, преобразования и обработки информации могут быть представлены в виде обобщенных структурных моделей. Подобные модели позволяют выполнять и содержательное, и формализованное описание структуры различных по своей физической природе систем обработки.

• В задачах обработки информации при описании состояния исследуемых систем, описании информационных процессов и описании помеховых воздействий основными математическими моделями являются статистические модели процессов или вероятностные модели случайных функций.

• Предложенная в данной главе общая классификация случайных функций основана на конкретизации пространства состояний и конкретизации множества параметров функции. Такой подход позволяет выделить из всего многообразия вероятностных моделей основные самостоятельные классы: случайные последовательности, случайные непрерывные процессы, случайные потоки событий, случайные поля. Эти классы функций существенно различаются не только по своему математическому представлению, но и по общему виду своих реализаций. В задачах обработки информации подобное деление особенно важно, так как от характера реализаций существенно зависят методы анализа и алгоритмы обработки процессов.

• Математическая постановка и формализация большинства задач обработки информации обычно выполняется в терминах общей статистической теории принятия решений. При этом могут быть выделены несколько наиболее распространенных типовых задач: 1) задачи классификации, различения, обнаружения; 2) задачи оценивания параметров; 3) задачи текущей фильтрации, интерполяции, прогноза.

• Нахождение эффективных алгоритмов обработки обычно связано с решением задач вероятностного анализа и статистического синтеза. Вероятностный анализ позволяет исследовать вероятностные модели сигналов и помех, исследовать эффективность алгоритмов, оценивать их устойчивость к изменениям априорных данных и к изменениям помеховой обстановки. Основной задачей статистического синтеза является нахождение структуры оптимальных (по заданному критерию оптимальности) алгоритмов обработки информационных процессов.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- **Определение и вероятностное описание**
- **Основные числовые характеристики**
- **Наиболее распространенные модели**
- **Анализ характеристик «превышений уровней»**
- **Поведение векторных последовательностей на плоскости**

В общей теории случайных функций случайные последовательности, или временные ряды — это один из самостоятельных классов функций. Многие реальные процессы, наблюдения, результаты измерений в физике и технике, экономике, биологии и медицине хорошо описываются моделями случайных последовательностей. Как правило, случайные последовательности исследуются проще, чем непрерывные случайные процессы и поля. Вместе с тем при исследовании последовательностей используются общие методы описания, математические модели и методы вероятностного анализа, которые важны при изучении любых классов случайных функций. Все эти особенности поясняют важность отдельного рассмотрения случайных последовательностей как с точки зрения общей теории, так и с позиций практических приложений.

Основное содержание данной главы связано с определением, вероятностным описанием, анализом информационной структуры и примерами прикладных задач, решение которых непосредственно приводит к исследованию случайных последовательностей.

2.1. Общее определение случайных последовательностей

Многие физические процессы, протекающие в природе, изменяются непрерывно во времени или в пространстве, т. е. относятся к классу непрерывных случайных функций $\xi(t, r)$. Наблюдения и измерения характеристик таких процессов на практике не всегда проводятся непрерывно.

Достаточно часто состояние исследуемых систем, или значения наблюдаемых процессов, измеряются через некоторые, обычно равные, интервалы времени Δt. При этом, по существу, от рассмотрения непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ переходят к рассмотрению последовательности его значений $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ... , $\xi(t_n)$. Для упрощения записи при выполнении условия $|t_{i+1} - t_i| = \Delta t = const$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, обычно используются обозначения $\xi(t_1) = \xi_1$, $\xi(t_2) = \xi_2$, ... , $\xi(t_n) = \xi_n$, или просто $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Сама операция перехода от $\xi(t)$ к последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ соответствует операции дискретизации непрерывного процесса $\xi(t)$ по времени t, а значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются при этом реализацией непрерывной случайной последовательности или временным рядом.

Схема 2.1.1

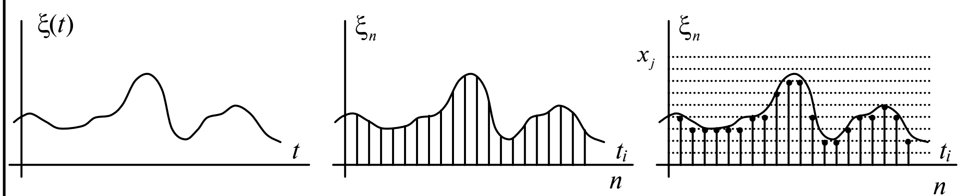
Непрерывные и дискретные случайные последовательности

- **Переход к исследованию случайных последовательностей на основе операций дискретизации и квантования непрерывных процессов**

• Реализация непрерывного процесса

• Реализация непрерывной последовательности

• Реализация дискретной последовательности



Исследуемый непрерывный случайный процесс ⇨ Дискретизация процесса $\xi(t)$ по времени t ⇨ Дискретизация процесса $\xi(t)$ по времени t и квантование значений ξ_n по уровню x_j

Типовые примеры появления случайных последовательностей

- **Измерения каких-либо параметров в дискретные моменты времени.** Это могут быть измерения температуры, давления, электрического тока, напряжения, скорости движения и т. д.
- **Специальный переход от исследования непрерывных случайных процессов $\xi(t)$ к исследованию случайных последовательностей.** Такой переход выполняется в системах дискретной или цифровой передачи информации, при обработке информационных процессов на ЭВМ, в задачах компьютерного моделирования, задачах дискретного управления и многих других ситуациях

Основные задачи вероятностного исследования случайных последовательностей по своему содержанию эквивалентны задачам исследования случайных временных рядов

Если, помимо перехода к дискретному параметру $t \Rightarrow t_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, выполнить также и переход от непрерывного состояния ξ к дискретному $\xi \Rightarrow x_j$, $j = 1, 2, \ldots$, то из непрерывного процесса $\xi(t)$ будет получена дискретная случайная последовательность. Такой переход $\xi \Rightarrow x_j$ соответствует операции квантования по уровню.

Схема 2.1.2

Формализованное определение случайных последовательностей

- **Общее определение случайной функции** $\{\xi(s), \xi \in X, s \in S\}$ – семейство случайных переменных $\xi(s)$

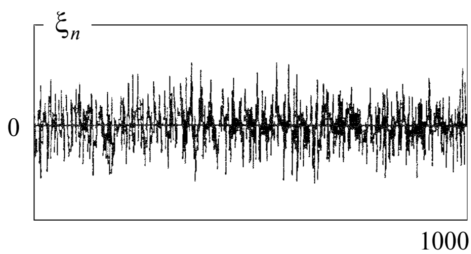
Если в этом определении:

- пространство состояний X – непрерывное,
- параметр $t = s$ – время,
- пространство параметров $S = T$ – дискретное, $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$,

то случайная функция

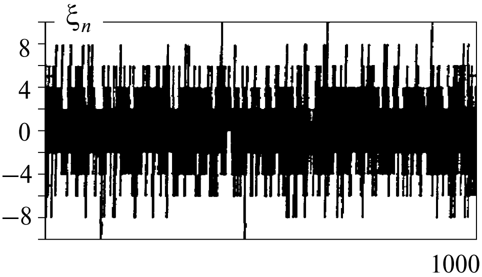
$$\{\xi(s), \xi \in X, s \in S\} = \{\xi(t), t \in T\} = \{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$$

называется непрерывной случайной последовательностью, или непрерывным процессом с дискретным временем, или временным рядом



- **Отдельная функция** ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ из семейства $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ называется выборочной функцией или реализацией непрерывной случайной последовательности

- Если в данном определении считать, что пространство состояний X – дискретное, то это будет соответствовать определению дискретной случайной последовательности



- **Характерный вид отдельной реализации** дискретной случайной последовательности

Дискретизация по времени $t \Rightarrow t_i$ и квантование по уровню $\xi \Rightarrow x_j$ – это две типовые операции, которые позволяют заменить исследования непрерывных случайных процессов $\xi(t)$ исследованиями случайных последовательностей (непрерывных или дискретных). Для наглядности описанных преобразований на схеме 2.1.1 показана их упрощенная физическая интерпретация.

Если к определению случайных последовательностей подойти с позиций формализованного подхода, то в соответствии с общей классификацией случайных функций (п. 1.2), налагая определенные ограничения на пространство параметров S и пространство состояний X, из общего определения случайных функций $\{\xi(s),\ \xi \in \mathrm{X},\ s \in S\}$ можно выделить самостоятельный класс случайных последовательностей (схема 2.1.2).

2.2. Особенности вероятностного описания

В зависимости от содержания решаемых задач построение математических моделей и вероятностное описание случайных функций может выполняться различными способами и с различной степенью детальности. В прикладных задачах модели случайных функций наиболее часто задаются семейством конечномерных распределений. В основе такого подхода находятся два взаимосвязанных вопроса: о способе описания случайной величины и о способе описания конечной последовательности случайных величин. Рассмотрим здесь подобные вопросы и выделим общие особенности вероятностного описания случайных функций.

1. Предположим, что наблюдению доступен некоторый произвольный случайный процесс $\{\xi(t),\ t \in T\}$, изменяющийся во времени. Каждая реализация такого процесса $\xi(t),\ t \in T$ условно может рассматриваться как результат отдельного эксперимента – результат наблюдения за изменениями какого-либо параметра исследуемой системы на временном интервале $[t_0,\ t_0 + T]$. Если наблюдения проводятся в неизменных условиях, то выполнив m одинаковых экспериментов, могут быть получены m реализаций:

$$\xi_i(t),\ t \in [t_0,\ t_0 + T],\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Все эти реализации будут различаться по своей форме, но их усредненные характеристики будут подчиняться общим закономерностям, связанным со свойствами или отдельными параметрами исследуемой системы.

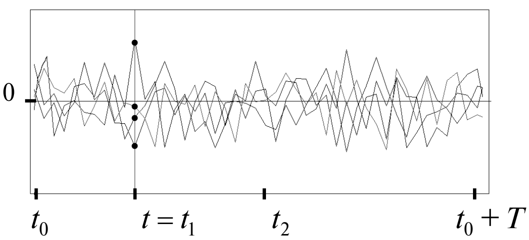
Если на интервале наблюдений $[t_0,\ t_0 + T]$ выбрать некоторый произвольный момент времени $t = t_1$, то значения (отсчеты) каждой реализации $\xi_i(t_1),\ i = \overline{1, m}$ в этот момент времени t_1 будут различными и их можно рассматривать как значения случайной величины $\xi(t_1)$. Иначе говоря, значения случайного процесса $\{\xi(t_1),\ t \in T\}$ в каждый фиксированный момент времени $t = t_1,\ t_1 \in T$ являются случайной величиной $\xi(t_1)$. Областью определения такой величины $\xi(t_1)$ в общем случае можно считать $\xi \in (-\infty, \infty)$.

Схема 2.2.1

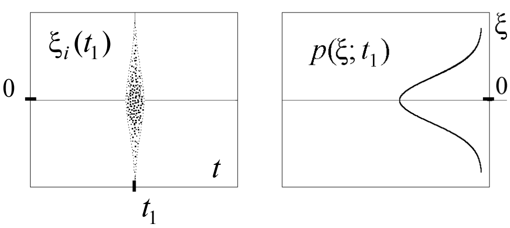
Особенности вероятностного описания случайных функций

- **Совокупность отдельных реализаций (выборочных функций) исследуемого случайного процесса**

$\xi_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, m$



В результате *m* независимых экспериментов получено *m* реализаций исследуемого процесса



«Плотность» (относительная частота появления в заданной области) отсчетных значений $\xi_i(t_1)$ отражает характер плотности вероятностей $p(\xi;\ t_1)$ случайной величины $\xi(t_1)$

Множество значений $\xi_i(t_1)$ случайной величины $\xi(t_1)$

На схеме 2.2.1 приведена иллюстрация подобных рассуждений.

Для полного вероятностного описания произвольной случайной величины $\xi(t_1)$ необходимо знать ее функцию распределения $F(\xi;\ t_1)$ или, при выполнении свойства дифференцируемости, функцию плотности вероятностей $p(\xi;\ t_1)$:

$$F(\xi; t_1) = P\{\xi(t_1) \le \xi\}, \quad p(\xi; t_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi; t_1), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

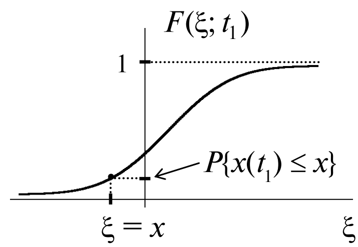
Схема 2.2.2

Определение, основные свойства и взаимосвязь функции распределения и плотности вероятностей

- **Функция распределения**

$$F(\xi; t_1) = P\{\xi(t_1) \le \xi\},\ \xi \in (-\infty; \infty)$$

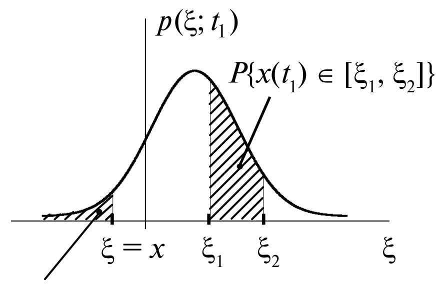
$$\lim_{\xi \to -\infty} F(\xi; t_1) = 0, \quad \lim_{\xi \to +\infty} F(\xi; t_1) = 1$$



- **Функция плотности вероятностей**

$$p(\xi; t_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi; t_1),\ \xi \in (-\infty; \infty)$$

$$p(\xi; t_1) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi; t_1) d\xi = 1$$



$$\int_{-\infty}^{x} p(\xi; t_1) d\xi = F(\xi = x; t_1) = P\{\xi(t_1) \le x\}$$

$$P\{\xi(t_1) \in [\xi_1, \xi_2]\} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(\xi; t_1) d\xi = F(\xi_2; t_1) - F(\xi_1; t_1)$$

- **Функция распределения $F(\xi; t_1)$ и плотность вероятностей $p(\xi; t_1)$ однозначно связаны между собой и позволяют полностью описать случайную величину $\xi(t_1)$. На их основе могут определяться все числовые характеристики случайной величины, а также могут вычисляться вероятности $\mathrm{P}\{\xi(t_1) \in \Omega\}$ нахождения случайной величины $\xi(t_1)$ в области заданных значений Ω**

В этом определении значение $P\{\xi(t_1) \le \xi\}$ характеризует вероятность события $\xi(t_1) \le \xi$. Основные свойства и взаимосвязь таких функций $F(\xi; t_1)$ и $p(\xi; t_1)$ показаны на схеме 2.2.2.

Функция распределения $F(\xi; t_1)$ и плотность вероятностей $p(\xi; t_1)$ однозначно связаны между собой, и поэтому оба способа описания случайной величины $\xi(t_1)$ формально являются равноценными.

Переходя к более общей ситуации, можно на интервале наблюдения $[t_0, t_0 + T]$ выбрать два различных момента времени $t_1, t_2 \in T$ и полученные при этом случайные величины $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ характеризовать двумерной функцией распределения:

$$F_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \le \xi_1, \xi(t_2) \le \xi_2\}$$

или двумерной плотностью вероятностей:

$$p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} F_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2).$$

В целом, на основе такого подхода можно считать случайный процесс $\{\xi(t),\ t \in T\}$ заданным, если при произвольно выбранной на интервале наблюдения $[t_0,\ t_0 + T]$ последовательности моментов времени t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, для семейства случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ определена совместная функция распределения:

$$F_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\{\xi(t_1) \le \xi_1,\ \xi(t_2) \le \xi_2, \ldots, \xi(t_n) \le \xi_n\}$$

или совместная плотность вероятностей:

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Такое семейство совместных распределений для различных значений t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ называется семейством конечномерных распределений. Важной особенностью конечномерных распределений является то, что помимо вероятностного описания случайных величин $\xi(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, функции $F_n(\ldots)$ и $p_n(\ldots)$ содержат полезную информацию и о взаимосвязи между значениями $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$. При использовании такого подхода в прикладных задачах выбор размерности n зависит от требуемой полноты описания рассматриваемого процесса $\{\xi(t),\ t \in T\}$ и от сложности явных выражений для семейства функций $F_n(\ldots)$ и $p_n(\ldots)$.

2. Нахождение многомерных распределений, вообще говоря, является достаточно сложной задачей, и поэтому целесообразно выделить здесь одну из распространенных ситуаций, в которой вероятностное описание случайных функций существенно упрощается.

Предположим, что исследуется некоторая последовательность случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$, и значения этой последовательности $\xi(t_i)$ и $\xi(t_j)$ при любых $i, j \le n$, $i \ne j$ обладают свойством взаимной статистической независимости. Если при этом $p(\xi;\ t_i)$ – одномерная плотность вероятностей для $\xi(t_i)$, то на основе свойства независимости, для произвольной совокупности случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_m)$, $m \le n$ можно определить совместную плотность вероятностей:

$$p_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t_1, t_2, \ldots, t_m) = p(\xi; t_1) \cdot p(\xi; t_2) \cdot \ldots \cdot p(\xi; t_m) = \prod_{i=1}^{m} p(\xi; t_i).$$

Если, помимо этого, функции $p(\xi;\ t_i)$ одинаковы при любых $i = \overline{1, m}$, то

$$p(\xi; t_i) = p(\xi), \qquad p_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \prod_{i=1}^{m} p(\xi; t_i) = [\, p(\xi)\,]^m.$$

Описание последовательности $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ в данном случае эквивалентно описанию последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Для их вероятностного анализа в подобных ситуациях достаточно знать лишь одномерную плотность вероятностей $p(\xi; t_i) = p(\xi)$, по которой может быть определена и многомерная плотность вероятностей.

• • • К изучению подобного класса моделей относится подавляющее большинство результатов классической теории вероятностей и математической статистики. Очень часто и в задачах обработки информационных процессов (с целью упрощения исследований) делается специальное допущение о независимости обрабатываемых наблюдений $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$.

3. При общем определении случайных последовательностей на схеме 2.1.1 и 2.1.2 были выделены непрерывные последовательности и дискретные случайные последовательности. Эти функции отличаются по виду своих реализаций ξ_n и имеют свои особенности вероятностного описания. Рассмотрим здесь кратко характерный вид распределений для дискретных последовательностей.

Для класса дискретных случайных последовательностей $\{\xi_n\}$ значение ξ_n в произвольно выбранный момент времени t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ является случайной величиной $\xi_i = \xi(t_i)$. Эта случайная величина относится к классу дискретных и в зависимости от решаемой задачи и исследуемых процессов имеет свою область определения. Предположим, что величина ξ может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда для полного вероятностного описания величины ξ необходимо знать ее возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и вероятности $p_j = P\{\xi = x_j\}$, с которыми величина ξ принимает эти значения x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Форма вероятностного описания может быть при этом различной. Так, например, дискретная случайная величина ξ может иметь табличное представление, в котором просто перечисляются возможные значения x_j и их вероятности p_j, $j = \overline{1, k}$. Другая распространенная форма описания связана с построением функции распределения $F(\xi; t_1)$ и плотности вероятностей $p(\xi; t_1)$. Характерный вид таких функций показан на схеме 2.2.3.

Функция распределения $F(\xi; t_1)$ определяется при этом выражением:

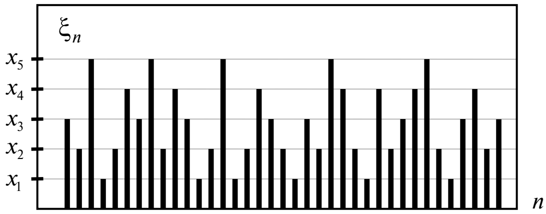
$$F(\xi; t_1) = P\left\{\xi(t_1) \le \xi\right\} = \sum_{x_j \le \xi} p_j,$$

где суммирование проводится по всем значениям индекса j, для которых $x_j \le \xi$. Из этого определения видно, что функция распределения дискретной случайной величины ξ является ступенчатой возрастающей функцией. По существу она отражает «накопление» вероятностей p_j при воз-

Схема 2.2.3

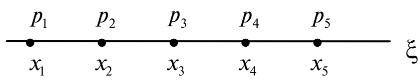
Вероятностное описание дискретной случайной величины

- **Отдельная реализация дискретной случайной последовательности**



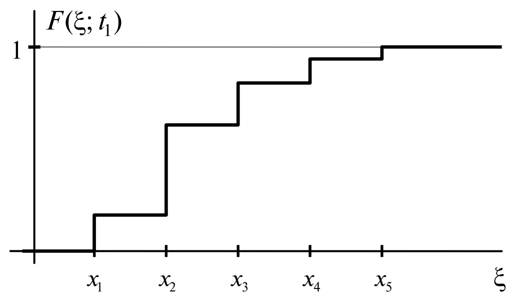
Значение ξ_n в произвольно выбранный момент времени t_i является дискретной случайной величиной

- Для вероятностного описания дискретной случайной величины необходимо знать ее возможные значения $x_1, x_2, ..., x_5$ и вероятности p_j, с которыми величина ξ принимает эти значения x_j, $j = \overline{1,5}$



- **Функция распределения**

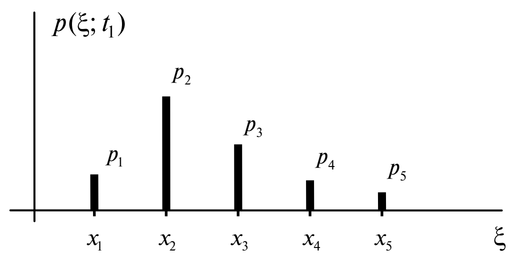
$$F(\xi;t_1) = P\{\xi(t_1) \le \xi\} = \sum_{x_j \le \xi} p_j$$



- **Функция плотности вероятностей**

$$p_j = P\{\xi = x_j\}$$

$$p_j \ge 0, \quad \sum_j p_j = 1$$



- **Функция распределения $F(\xi;\ t_1)$ дискретной случайной величины ξ является ступенчатой возрастающей функцией**

растании ξ. Изменения этой функции происходят в точках $\xi = x_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, а величина скачков соответствует значениям вероятностей p_j событий $\xi = x_j$.

Функция плотности вероятностей $p(\xi;\ t_1)$ отражает возможные значения $x_1, x_2, \dots$ дискретной случайной величины ξ и соответствующие этим значениям вероятности $p_1, p_2, \dots$.

2.3. Основные числовые характеристики

Наиболее полное вероятностное описание случайных процессов и случайных последовательностей дается семейством конечномерных распределений. Экспериментальные определения таких функций не всегда легко выполняются, а во многих практических задачах и не требуется полного вероятностного описания исследуемых процессов. Как правило,

Схема 2.3.1

Общее определение наиболее важных для практики моментных функций

- **Основными числовыми характеристиками распределений являются моментные функции. В практических задачах наиболее часто используются одномерные и двумерные моментные функции**
- **Определение одномерных моментных функций**

$$m_\nu(t_1) = M\left\{\xi^\nu(t_1)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^\nu(t_1)\; p(\xi; t_1)\, d\xi$$

$$m_\nu^\circ(t_1) = M\left\{\left[\xi(t_1) - m_1(t_1)\right]^\nu\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\xi(t_1) - m_1(t_1)\right]^\nu p(\xi; t_1)\, d\xi$$

- **Определение двумерных моментных функций**

$$m_{\nu_1\nu_2}(t_1, t_2) = M\left\{\xi^{\nu_1}(t_1)\,\xi^{\nu_2}(t_2)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\; p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$m_{\nu_1\nu_2}^\circ(t_1, t_2) = M\left\{\left[\xi(t_1) - m_1(t_1)\right]^{\nu_1}\left[\xi(t_2) - m_1(t_2)\right]^{\nu_2}\right\} =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\xi_1 - m_1(t_1)\right]^{\nu_1}\left[\xi_2 - m_1(t_2)\right]^{\nu_2} p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

- Моментные функции m_ν и $m_{\nu_1\nu_2}$ вычисляются непосредственно для случайных величин $\xi_1 = \xi(t_1)$ и $\xi_2 = \xi(t_2)$. Называются такие функции ***начальными моментными функциями***
- Моментные функции m_ν° и $m_{\nu_1\nu_2}^\circ$ вычисляются для центрированных случайных величин, т.е. для отклонений ξ_1 и ξ_2 от их средних значений $m_1(t_1)$ и $m_1(t_2)$. В соответствии с этим, функции m_ν° и $m_{\nu_1\nu_2}^\circ$ называются ***центральными моментными функциями***
- Значение ν называется порядком моментной функции. Для двумерных функций значение $\nu = \nu_1 + \nu_2$
- **Оператор $M\{x\}$ отражает операцию вычисления математического ожидания случайной величины x, т. е. показывает, что все моментные функции определяются на основе вероятностного усреднения**

в таких задачах достаточным является знание лишь отдельных числовых характеристик распределений или отдельных свойств изучаемых процессов.

1. Для описания характерных свойств распределений обычно используются моментные функции. По определению все моментные функции делятся на начальные и центральные. В зависимости от размерности к наиболее распространенным на практике относятся одномерные и двумерные моментные функции. Общее определение таких функций приведено на схеме 2.3.1.

Особое значение среди моментных функций имеют:

$$m_1 = M\{\xi(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t_1)\, p(\xi; t_1)\, d\xi = m_\xi(t_1),$$

$$m_2^\circ = M\left\{\left[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right]^2 p(\xi; t_1)\, d\xi = \sigma_\xi^2(t_1),$$

$$m_{11}^\circ(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)]\cdot[\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\} = R_\xi(t_1, t_2).$$

Обычно для записанных характеристик используются специальные обозначения m_ξ, σ_ξ^2, $R_\xi(t_1, t_2)$, и, кроме того, важно, что эти функции имеют простую и наглядную физическую интерпретацию.

Функция $m_1 = m_\xi(t_1)$ характеризует среднее значение исследуемой случайной величины $\xi(t_1)$, и называется математическим ожиданием. Моментная функция $m_2^\circ = \sigma_\xi^2(t_1)$ соответствует дисперсии и характеризует степень рассеяния значений случайной величины $\xi(t_1)$ относительно ее математического ожидания $m_\xi(t_1)$. Двумерная моментная функция $m_{11}^\circ(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2)$ называется корреляционной функцией и, в соответствии с ее определением, характеризует взаимосвязь между значениями $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$.

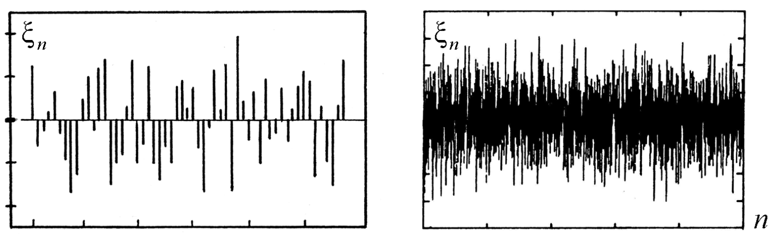
• • • Общее определение моментных функций (схема 2.3.1) показывает, что все основные характеристики распределений находятся путем вероятностного усреднения и записываются в виде математического ожидания $M\{...\}$ исследуемой случайной величины ξ или функции от ξ, или функции от нескольких случайных величин, например, от $\xi_1 = \xi(t_1)$ и $\xi_2 = \xi(t_2)$.

• • • Важной особенностью моментных функций является то, что наиболее интересную информацию об изучаемых процессах несут в себе моментные функции низких порядков $\nu = 1, 2, 3, 4$. С повышением порядка $\nu > 4$ усложняется вычисление моментных функций, существенно снижается точность вычислений и общая информативность. Именно этими особенностями и объясняются причины наибольшего распространения на практике моментных функций низких порядков $\nu \le 4$.

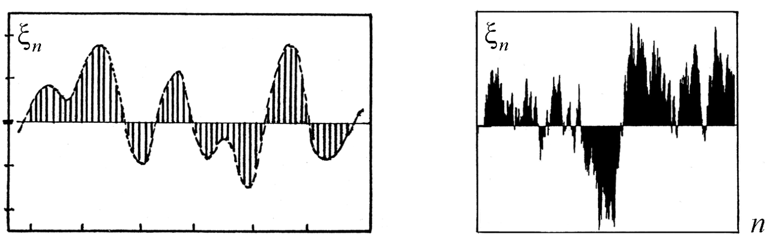
Схема 2.3.2

Статистическая независимость и взаимосвязь наблюдаемых данных

- **Вероятностное описание и исследование случайных функций $\xi(t)$ наиболее просто выполняется при условии статистической независимости отдельных значений $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n)$**
- На практике свойство статистической независимости для ξ_i и ξ_j при любых $i \neq j$ выполняется не всегда. Во многих задачах априорно известно, что наблюдаемые данные взаимосвязаны, и по условиям задачи необходимо исследовать характер такой зависимости



Реализации двух различных случайных последовательностей со статистически независимыми значениями



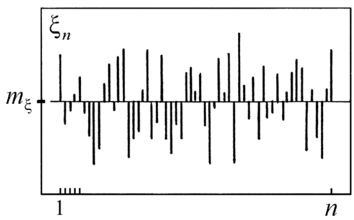
Случайные последовательности в данной ситуации порождены или управляются медленно изменяющимися процессами, и отдельные значения ξ_n не могут считаться здесь независимыми

Типовые примеры задач, решение которых основано на исследованиях взаимосвязи между наблюдаемыми данными:

- задачи анализа динамики развития процессов и систем
- задачи идентификации сложных систем
- задачи прогноза и оптимального управления
- задачи выделения информационных сигналов на фоне помех
- задачи технической и медицинской диагностики
- задачи компьютерного моделирования случайных процессов
- задачи классификации сигналов и распознавания образов

Схема 2.3.3

Особенности корреляционных функций для случайных последовательностей



$\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – **исследуемая непрерывная случайная последовательность**

$p(\xi_i) = p(\xi)$ – плотность вероятностей одинакова при любых $i \le n$

- **Математическое ожидание** $\quad m_\xi = M\{\xi\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi\, p(\xi)\, d\xi$

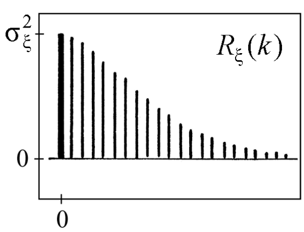
- **Дисперсия** $\quad \sigma_\xi^2 = M\left\{\left(\xi - m_\xi\right)^2\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\xi - m_\xi\right)^2 p(\xi)\, d\xi$

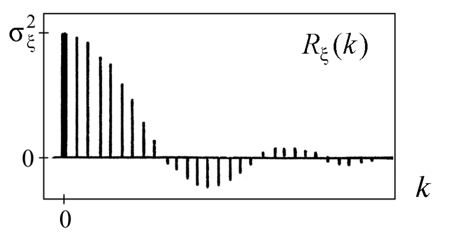
- **Корреляционная функция**

$$R_\xi(t_i, t_j) = M\left\{\left[\xi_i - m_\xi\right]\left[\xi_j - m_\xi\right]\right\} =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\xi_i - m_\xi\right)\left(\xi_j - m_\xi\right) p_2(\xi_i, \xi_j; t_i, t_j)\, d\xi_i\, d\xi_j$$

- Корреляционная функция $R_\xi(t_i, t_j) = R_\xi(k)$ характеризует линейную зависимость между значениями $\xi_i = \xi(t_i)$ и $\xi_j = \xi(t_j)$, $j = i + k$, разнесенными друг от друга на интервалы времени (k = 0, 1, 2, ...)
- Во многих практических задачах корреляционная функция $R_\xi(k)$ имеет вид монотонно убывающей или колебательной затухающей функции





При $k = 0$ $\qquad R_\xi(k) = R_\xi(0) = M\{(\xi_i - m_\xi)^2\} = \sigma_\xi^2$

При любых k $\qquad R_\xi(k) \le R_\xi(0) = \sigma_\xi^2$

- Поскольку в определении случайной последовательности $\{\xi_n\} = \{\xi(t_n)\}$ параметр t_n, $n = 1, 2, ...$ – дискретный, функция $R_\xi(k)$ также имеет дискретный характер

2. Сложность исследований случайных процессов $\xi(t)$ и последовательностей ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ заметно снижается, если изучаемые значения $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$, или в более простой форме записи, $\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_n$ обладают свойством независимости. Ясно, что выполняется это не всегда. Например, при анализе последовательностей ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, порожденных узкополосными непрерывными процессами $\xi(t)$, трудно предполагать, что любые значения $\xi_i = \xi(t_i)$ и $\xi_j = \xi(t_j)$ при любых $i \neq j$ независимы. Более того, во многих задачах априорно известно, что наблюдения ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ статистически взаимосвязаны, и характер этой связи важен сам по себе (схема 2.3.2).

При произвольной зависимости между ξ_i и ξ_j вероятностное описание случайной последовательности ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ является полным, если для любой совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, $m \leq n$ может быть найдена совместная функция распределения $F_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t_1, t_2, \ldots, t_m)$ или совместная плотность вероятностей $p_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Сложность подобного описания обычно связана со сложностью функций $F_m(\ldots)$ и $p_m(\ldots)$ при размерностях $m \geq 2$.

Если при анализе последовательностей ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ ограничиться лишь рассмотрением линейных взаимосвязей между различными значениями ξ_i и ξ_j, $i \neq j$, то весь анализ может быть выполнен в рамках корреляционной теории случайных функций. На схеме 2.3.3 показаны особенности определения, основные свойства и характерный вид корреляционной функции для непрерывных случайных последовательностей.

2.4. Простые гауссовские модели

Результаты любых исследований прежде всего зависят от содержания решаемой задачи и конкретной вероятностной модели, которая подвергается исследованию. Существующие модели случайных последовательностей и случайных процессов весьма разнообразны. Однако во всем этом разнообразии гауссовские модели играют особую роль. Они важны и в теоретических, и в экспериментальных исследованиях. Они обладают многими важными свойствами, и в большинстве практических задач заслуживают самостоятельного рассмотрения.

1. Описание и анализ гауссовских моделей начнем с наиболее простой ситуации. Будем считать, что исследуется некоторая случайная последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$, представляющая собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Для полного вероятностного описания таких последовательностей $\{\xi_n\}$ достаточно знать лишь одномерную плотность вероятностей $p(\xi_i) = p(\xi)$ или одномерную функцию распределения $F(\xi_i) = F(\xi)$. Если при этом функции $p(\xi)$ и $F(\xi)$ имеют вид:

$$p(\xi) = \frac{1}{\sigma_\xi \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} \right],$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} p(x)\,dx = \Phi\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right), \qquad \xi \in (-\infty, \infty), \tag{2.4.1}$$

то рассматриваемая последовательность $\{\xi_n\}$ называется гауссовской. Параметры m_ξ и σ_ξ^2 характеризуют здесь, соответственно, математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ_i, $i = \overline{1, n}$, а функция $\Phi(x)$ представляет собой хорошо известный и подробно табулированный [16] интеграл вероятности:

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)\,dy. \tag{2.4.2}$$

На схеме 2.4.1 показан характерный вид функций $p(\xi)$ и $F(\xi)$ и перечислены основные особенности одномерных гауссовских распределений (1).

По своей сути, плотность вероятностей $p(\xi)$ и функция распределения $F(\xi)$ позволяют полностью описать исследуемую гауссовскую случайную величину ξ. Если рассматривается последовательность независимых гауссовских величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, каждая из которых имеет свои параметры:

$$m_i = M\{\xi_i\}, \quad \sigma_i^2 = M\{(\xi_i - m_i)^2\}, \quad i = \overline{1, n},$$

то для полного их описания необходимо знать совместную плотность вероятностей. При условии взаимной независимости величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ такая функция определяется достаточно просто:

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = p(\xi_1 | m_1, \sigma_1^2) \cdot p(\xi_2 | m_2, \sigma_2^2) \cdot \ldots \cdot p(\xi_n | m_n, \sigma_n^2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\xi_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \right]. \tag{2.4.3}$$

Вероятностное описание гауссовской последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ еще более упрощается, если независимые случайные величины имеют одинаковые параметры. В подобной ситуации

$$m_i = M\{\xi_i\} = m_\xi = const, \quad \sigma_i^2 = \sigma_\xi^2 = const, \quad i = \overline{1, n},$$

и в соответствии с формулами (1)–(3):

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_\xi^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - m_\xi)^2 \right]. \tag{2.4.4}$$

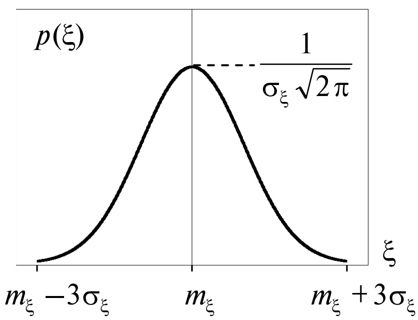
• • • Записанные плотности вероятностей (3) и (4) позволяют находить любые числовые характеристики гауссовских последовательностей при исследованиях независимых случайных величин $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots, n\}$.

2. В более общих ситуациях свойство независимости для рассматриваемой совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ может не выполняться. При подобном подходе случайная последовательность $\{\xi_n\}$ называется гауссовской, если совместные распределения для любой конечной

Схема 2.4.1

Одномерное гауссовское (нормальное) распределение

- **Особенности поведения плотности вероятностей**



$$p(\xi) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

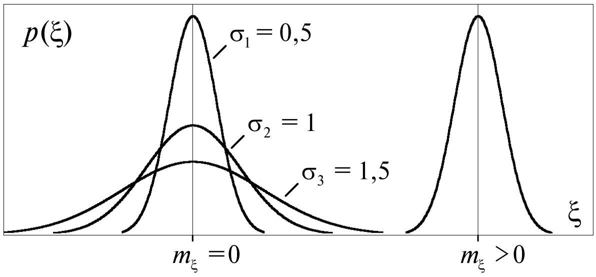
При $m_\xi = 0$ и $\sigma_\xi^2 = 1$ плотность вероятностей соответствует **стандартному нормальному распределению**

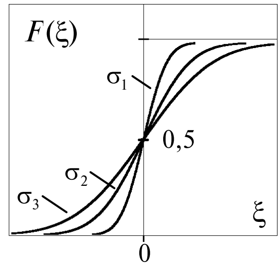
$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \ \xi \in (-\infty, \infty)$$

Основные свойства

- Полностью определяется двумя параметрами m_ξ и σ_ξ^2
  m_ξ – математическое ожидание, σ_ξ^2 – дисперсия
- Функция $p(\xi)$ симметрична относительно оси $\xi = m_\xi$
- Обладает свойством унимодальности
  при $\xi = m_\xi$, $p(\xi) = p(\xi \,|\, \xi = m_\xi) = \max p(\xi) = (2\pi\sigma_\xi^2)^{-1/2}$
- Изменяется на интервале $\xi \in (-\infty, \infty)$, однако вероятность нахождения случайной величины ξ в диапазоне $\xi \in [m_\xi \pm 3\sigma_\xi]$ равна значению $P\{\xi \in [m_\xi \pm 3\sigma_\xi]\} = 0{,}997$
- Вычисления вероятностей вида $P\{\xi \in [a, b]\}$ легко выполняются по таблицам табулированной функции $\Phi(x)$ при $m_\xi = 0$ и $\sigma_\xi^2 = 1 \Rightarrow P\{\xi \in [a, b]\} = \Phi(b) - \Phi(a)$

- **Характерный вид функций $p(\xi)$ и $F(\xi)$ при изменениях параметров**





совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ при произвольных $m \le n$ являются m-мерными нормальными распределениями.

Совместная нормальная плотность вероятностей для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеет вид [20, 67, 103]:

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \, |R|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(2|R|)^{-1} \sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)\right]. \quad (2.4.5)$$

В этом выражении $m_i = M\{\xi_i\}$ – математические ожидания случайных величин ξ_i; R – корреляционная матрица, определяемая как:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} \end{bmatrix}; \quad (2.4.6)$$

$R_{ij} = R_{ji} = M\{(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)\} = \sigma_i \sigma_j r_{ij}$ – коэффициент корреляции для ξ_i и ξ_j, $i, j = \overline{1, n}$;
$\sigma_i^2 = R_{ii} = M\{(\xi_i - m_i)^2\}$ – дисперсии величин ξ_i; $|R| = \det R$ – определитель корреляционной матрицы; A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента R_{ij} в определителе $|R|$.

• • • Выражение (5) показывает общий вид многомерного нормального распределения. На основе плотности вероятностей $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ выполняется полное вероятностное описание гауссовских случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а также взаимосвязей между ними.

3. Сложность общего изучения случайных последовательностей $\{\xi_n\}$ всегда зависит от наличия взаимосвязей между рассматриваемыми случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Многомерная нормальная плотность вероятностей (5) показывает, что описание зависимостей между гауссовскими величинами ξ_i, ξ_j, $i, j = \overline{1, n}$ полностью выполняется на основе корреляционных характеристик (6). Это свойство оказывает существенное влияние на решение многих практических задач, и для его более полного рассмотрения целесообразно выделить характерные особенности описания двух зависимых гауссовских случайных величин.

Будем считать, что ξ_1 и ξ_2 – случайные гауссовские величины с параметрами m_1, σ_1^2 и m_2, σ_2^2. Для их полного описания на основе выражения (5) при $n = 2$ получим двумерную плотность вероятностей:

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r^2)}\left[\frac{(\xi_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$-\frac{2r(\xi_1-m_1)(\xi_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(\xi_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (2.4.7)$$

В этом распределении значение r соответствует нормированному значению коэффициента корреляции:

$$r=\frac{M\{(\xi_1-m_1)(\xi_2-m_2)\}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{R_{12}}{\sigma_1\sigma_2}, \qquad R_{12}=R_{21}. \qquad (2.4.8)$$

Величина коэффициента r характеризует степень линейной взаимосвязи между гауссовскими величинами ξ_1 и ξ_2. Значение r может изменяться в диапазоне $r \in [-1, 1]$. При этом если случайные величины независимы, коэффициент корреляции между ними $r = 0$. Важным свойством гауссовских моделей является то, что для них справедливо и обратное утверждение: если гауссовские величины ξ_1 и ξ_2 некоррелированы, то они являются статистически независимыми.

На схеме 2.4.2 показан характер поведения двумерных нормальных плотностей вероятностей для коррелированных и некоррелированных гауссовских величин ξ_1 и ξ_2.

4. Гауссовские модели, как уже подчеркивалось, занимают особое положение среди всего многообразия существующих вероятностных моделей. Они являются наиболее распространенными и наиболее изученными. Навряд ли найдется такая книга по теории вероятностей и математической статистике, в которой отсутствует описание нормального распределения. Однако, несмотря на это, полезно выделить здесь некоторые характерные особенности гауссовских моделей – особенности, которые существенно влияют на решение многих практических задач.

Общие свойства гауссовских моделей

- Гауссовскими моделями хорошо описываются многие реальные процессы в физических, технических, биологических и социально-экономических системах.
- При совместном аддитивном воздействии и при сложении большого числа случайных факторов, оказывающих примерно одинаковое влияние на общий результат, результирующий эффект с возрастанием числа слагаемых приближается к гауссовскому. Доказательство подобных свойств основывается на центральной предельной теореме теории вероятностей.
- Гауссовские процессы сохраняют свойство гауссовости при различных линейных преобразованиях.
- На выходе многих линейных инерционных систем за счет эффектов нормализации выходные процессы приближаются к гауссовским даже при негауссовских входных воздействиях. Такой эффект

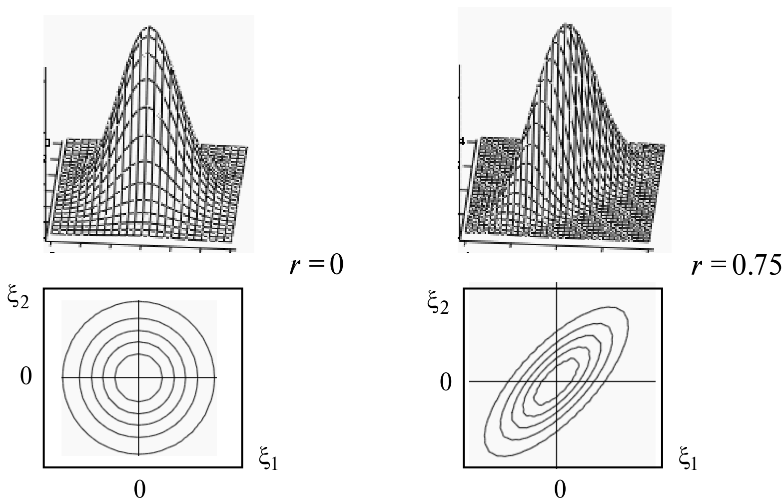
Схема 2.4.2

Особенности двумерных нормальных распределений

- **Характер поведения двумерной плотности вероятностей**

  Для случайных гауссовских величин ξ_1 и ξ_2 с параметрами $m_1 = m_2 = m_\xi = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\xi = 1$ совместное распределение имеет стандартный вид:

$$p_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\xi_1^2 + 2r\xi_1\xi_2 + \xi_2^2\right)\right]$$



Двумерные нормальные плотности вероятностей и характер поведения эллипсов рассеяния при значениях коэффициента корреляции $r = 0$ и $r = 0{,}75$

- Эллипсы рассеяния представляют собой сечения поверхности двумерной плотности вероятностей $p_2(\xi_1, \xi_2)$ плоскостями, параллельными плоскости $\xi_1 0 \xi_2$, т. е. являются эллипсами равной вероятности
- Если случайные гауссовские величины ξ_1 и ξ_2 не связаны корреляционной зависимостью, то коэффициент корреляции $r = 0$, и для ξ_1 и ξ_2 выполняется свойство статистической независимости:

$$p_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\right] = p(\xi_1)\,p(\xi_2)$$

- **При некоррелированности ξ_1 и ξ_2 направления осей симметрии эллипсов рассеяния совпадают с направлениями координатных осей $0\xi_1$ и $0\xi_2$**

наглядно проявляется, например, в радиофизических системах, когда исследуются случайные процессы на выходе линейных узкополосных (инерционных) систем при негауссовских широкополосных процессах на входе.
- Гауссовские модели полностью описываются в рамках корреляционной теории случайных функций. Это существенно упрощает экспериментальные и теоретические исследования.
- Гауссовские модели удобны в аналитических исследованиях, и они относятся к классу наиболее изученных вероятностных моделей. Многие задачи вероятностного анализа и обработки информации удается решить только при допущениях о гауссовости рассматриваемых процессов.
- По определению гауссовские случайные величины и процессы описываются нормальными распределениями. Такое распределение обладает максимальной энтропией, и эта особенность позволяет исследовать предельные или потенциально достижимые характеристики алгоритмов и систем.

Помимо перечисленных здесь особенностей, полезно подчеркнуть, что многие реальные негауссовские случайные процессы относятся по своей природе к классу процессов, «порожденных гауссовскими». Результаты детальных исследований гауссовских моделей позволяют в подобных ситуациях более полно изучать и разнообразные модели сложных негауссовских случайных функций.

2.5. Модели, порожденные гауссовским распределением

Ясно, что при всей важности и практической полезности гауссовских моделей они не являются единственно возможными и, естественно, далеко не все случайные процессы могут быть удовлетворительно описаны гауссовским распределением. Наиболее распространенная причина появления негауссовости – это разнообразные нелинейные преобразования. Если гауссовский процесс подвергается какому-либо нелинейному преобразованию, то свойство гауссовости нарушается; распределения преобразованных процессов становятся негауссовскими, а их характер обычно зависит как от параметров исходного случайного воздействия, так и от конкретного вида преобразования.

Не будем здесь перечислять особенности существующего многообразия нелинейных систем и многообразия негауссовских распределений; рассмотрим кратко лишь сам принцип нахождения вероятностных характеристик после функциональных преобразований случайной величины и приведем несколько практически важных вероятностных моделей, порожденных гауссовскими процессами.

1. Функциональное преобразование случайных величин

Достаточно часто, независимо от конкретных областей физических, технических или биологических приложений, в задачах обработки и анализа информационных процессов приходится рассматривать различные преобразования исследуемых случайных функций и находить характеристики или вид распределений преобразованных случайных процессов. Рассмотрим наиболее простую типовую ситуацию, которая позволяет прояснить принцип нахождения плотностей вероятностей преобразованных случайных величин.

Предположим, что исследуется случайная последовательность $\{\xi_n\}$, представляющая собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n, каждая из которых описывается некоторой плотностью вероятностей $\mathrm{p}_{\xi_i}(\xi_i) = \mathrm{p}_\xi(\xi)$. Будем считать, что последовательность $\{\xi_n\}$ подвергается преобразованию $\xi \Rightarrow f(\xi) = \eta$, где $f(x)$ – однозначная детерминированная функция, и необходимо найти плотность вероятностей $p_\eta(\eta)$ для преобразованных случайных величин η. Так как случайные величины ξ и η связаны между собой однозначной детерминированной зависимостью, то можно заметить, что при нахождении исходной величины ξ в некотором заданном интервале $\xi \in [x, x + dx]$ преобразованная случайная величина η всегда будет находиться в интервале $[y, y + dy]$, где $y = f(x)$, $dy = df(x) / dx$. Иначе говоря, при однозначной взаимной связи между ξ и η вероятность события $\xi \in [x, x + dx]$ эквивалентна вероятности события $\eta \in [y, y + dy]$. Для большей наглядности пояснение этого свойства приведено на схеме 2.5.1.

В данном случае при монотонно возрастающей функции $f(x)$, т. е. при $df(x)/dx > 0$ выполняется равенство вероятностей:

$$P\{\eta \le y\} = P\{f(\xi) \le y\} = P\{\xi \le \varphi(y)\},$$

а при $df(x)/dx < 0$, соответственно,

$$P\{\eta \le y\} = P\{f(\xi) \ge y\} = P\{\xi \ge \varphi(y)\},$$

где $x = \varphi(y)$ – функция, обратная функции $f(x)$.

Записанное свойство эквивалентности приводит к простому правилу «пересчета» плотностей вероятностей при функциональных преобразованиях [53, 67, 108]:

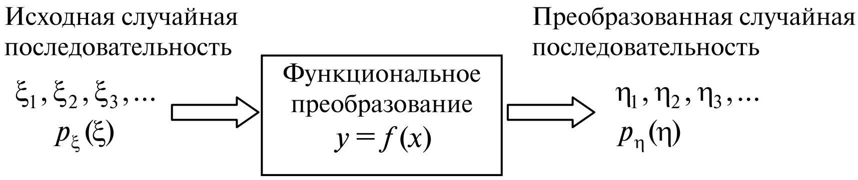
$$p_\eta(\eta) = p_\xi(\xi)\frac{d\xi}{d\eta} = p_\xi(\varphi(\eta))|\varphi'(\eta)|. \qquad (2.5.1)$$

По существу такой результат отражает операцию замены переменной в исходной плотности вероятностей $p_\xi(\xi)$ по заданной функциональной связи между ξ и η. Значение производной $d\xi/d\eta = \mathrm{d}\varphi(\eta)/\mathrm{d}\eta$ соответствует здесь якобиану преобразования от переменной ξ к переменной η.

Схема 2.5.1

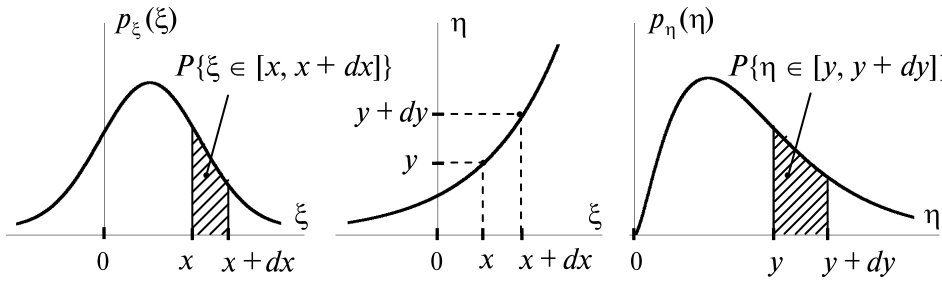
Принцип простого функционального преобразования

- **Во многих задачах обработки информации необходимо исследовать случайные величины, которые сами являются функциями других случайных величин**



$\eta = f(\xi)$ – общий вид преобразования

$\xi = \varphi(\eta)$ – обратная функциональная зависимость



- При взаимооднозначном функциональном преобразовании $\eta = f(\xi)$ случайной величины ξ выполняется равенство вероятностей:

$$P\{\xi \in [x, x + dx]\} = P\{\eta \in [y, y + dy]\}.$$

  Из этого равенства следует, что $p_\xi(x)dx = p_\eta(y)dy$, или, в более общем виде, $p_\xi(\xi)d\xi = p_\eta(\eta)d\eta$

- **Плотность вероятностей** $p_\eta(\eta)$ преобразованной случайной величины η, с учетом функциональной связи $\eta = f(\xi)$ и $\xi = \varphi(\eta)$, определяется на основе простой операции замены переменной в дифференциальном выражении:

$$p_\eta(\eta) = p_\xi(\xi)\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\eta}\right| = p(\varphi(\eta))\left|\frac{\mathrm{d}\varphi(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\right|$$