



МИР

цифровой обработки

В.Ф. Кравченко,
Д.В. Чуриков

Цифровая обработка
сигналов атомарными
функциями и вейвлетами

Под ред. заслуженного деятеля
науки РФ, д.ф.-м.н.,
проф. В.Ф. Кравченко

ТЕХНОСФЕРА

Москва
2018

УДК 537.87 + 621.371

ББК 22.336

К78

Рецензенты:

Пустовойт В.И. – академик РАН, Научно-технологический центр уникального приборостроения Российской академии наук.

Крюковский А.С. – доктор физико-математических наук, профессор, Российский новый университет.

К78 Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В.

Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами

Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2018. – 182 с. ISBN 978-5-94836-506-0

Монография посвящена исследованию, развитию и разработке методов анализа физических систем на основе теорий R- и атомарных функций, WA-систем функций, построению алгоритмов обработки и моделирования процессов дистанционного зондирования и радиоастрономии в целях улучшения физических характеристик передачи, восстановления и распознавания многомерных сигналов. Рассматриваются новые весовые функции (окна) и фильтры с конечной импульсной характеристикой на их основе, а также ортогональные и аналитические вейвлеты. Исследована обобщенная теорема отсчетов на основе атомарных функций и ее частные случаи. Разработан алгоритм синтеза многомерных функций с произвольной геометрией опорной области. Предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте применительно к анализу сложных зондирующих сигналов.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, работающих в области цифровой обработки сигналов применительно к современным задачам радиофизики и радиотехники.

УДК 537.87 + 621.371

ББК 22.336

© 2018, Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В.

© 2018, АО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», оригинал-макет, оформление

ISBN 978-5-94836-506-0

VICTOR FILIPPOVICH KRAVCHENKO,
DMITRY VICTOROVICH CHURIKOV

Digital Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets

Edited by the Honored scientist of the Russian Federation,
doctor of physical and mathematical sciences,
professor V.F. Kravchenko

TECHNOSPHERA
Moscow
2018

UDK 537.87 + 621.371

BBK 22.336

K78

Reviewers:

Pustovoyt V.I. – academician of RAS, Scientific and Technological Center of Unique Instrumentation of the Russian Academy of Sciences.

Kryukovsky A.S. – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Russian New University.

Kravchenko V.F., Churikov D.V.

Digital Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets

Moscow: TECHNOSPHERA publishers, 2018. – 182 p.

ISBN 978-5-94836-506-0

The monograph is devoted to research and the development of methods for analysis of physical systems on the basis of theories of R- and atomic functions, WA-systems of functions, the construction of processing algorithms and simulation of remote sensing and radio astronomy processes with the objective of improving the physical characteristics of the transmission, recovery, and recognition of multidimensional signals. The new weight functions (windows) and finite impulse response filters based on them, as well as analytical and orthogonal wavelets are described. The generalized sampling theorem based on atomic functions and its special cases are investigated. The algorithm of synthesis of multidimensional functions with reference area of complex shape geometry is developed. The generalization of the ambiguity function of time and frequency in relation to the analysis of complex sounding signals is proposed and justified.

The book is intended for researchers, postgraduates and students working in the field of digital signal processing as applied to modern problems of radiophysics and radio engineering.

© 2018, Kravchenko V.F., Churikov D.V.

© 2018, TECHNOSPHERA JSC, design. All Rights Reserved

Содержание

Введение	11
Список используемых сокращений	15
Глава 1.	
Атомарные функции в задачах фильтрации и цифровой обработки сигналов	16
1.1. Основные системы атомарных функций и физические характеристики.....	16
1.1.1. Семейство атомарных функций $\text{fir}_N(x)$	16
1.1.2. Семейство атомарных функций $h_a(x)$	17
1.1.3. Физические характеристики.....	19
1.2. Конструкции весовых функций и улучшение их физических характеристик.....	21
1.2.1. Весовые функции Кравченко — Кайзера.....	21
1.2.2. Весовые функции Кравченко — Наттолла.....	22
1.3. Конструкции фильтров с конечной импульсной характеристикой на основе атомарных функций.....	24
1.3.1. Фильтры с линейной фазовой характеристикой.....	24
1.3.2. Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой.....	25
1.3.3. Разработка КИХ-фильтров.....	25
1.3.4. Построение фильтра с конечной импульсной характеристикой.....	26
1.4. Обобщенные ряды отсчетов.....	30
1.4.1. Обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций.....	31
1.4.2. Физический смысл обобщенного ряда отсчетов.....	32
1.4.3. Весовая функция Кравченко — Котельникова.....	35
1.4.4. Обобщенная теорема отсчетов для случайных сигналов.....	39
1.4.5. Анализ частных случаев обобщенных рядов отсчетов.....	40
1.4.6. Учет погрешностей обобщенной теоремы отсчетов.....	45
1.4.7. Ядро ряда отсчетов Кравченко — Левитана.....	47
1.5. Непараметрическое оценивание функции плотности вероятности последовательности случайных величин.....	49
1.5.1. Допустимые оценки функции плотности вероятности и ее производных.....	51
1.5.2. Численный эксперимент.....	53
Выводы	56
Глава 2.	
Применение WA-систем функций в задачах радиофизики	57
2.1. Построение ортогональных WA-систем функций.....	57
2.1.1. Ортогональные WA-системы функций $\{\tilde{w}_p(t)\}$	57
2.1.2. Алгоритм Кравченко построения ортогональных WA-систем функций.....	64
2.1.3. Построение ортогональных WA-систем функций на основе атомарных функций $h_a(x)$	65
2.2. Ортогональные WA-системы функций в цифровой обработке сигналов и изображений.....	67

2.2.1. Удаление шума и компрессия одномерных сигналов.....	67
2.2.2. Удаление шума и компрессия изображений.....	69
2.3. Аналитические WA-системы функций.....	74
2.3.1. Построение комплексных WA-систем функций.....	74
2.3.2. Функционал качества выбора вейвлетного базиса.....	77
2.3.3. Анализ временных рядов комплексными WA-системами функций.....	77
Выводы.....	83
Глава 3.	
Синтез многомерных цифровых фильтров.....	84
3.1. Теория R-функций и обратная задача аналитической геометрии.....	84
3.2. Синтез двумерных цифровых фильтров с нестандартной геометрией опорной области.....	89
3.2.1. Двумерные цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой.....	89
3.2.2. Локусы сложной формы и опорные области двумерных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой.....	91
3.2.3. Построение двумерного фильтра с конечной импульсной характеристикой.....	91
3.2.4. Численная реализация алгоритма и анализ физических результатов.....	93
3.3. Аналитические двумерные WA-системы функций и их физические свойства.....	105
3.3.1. Построение двумерных WA-систем функций.....	105
3.3.2. Физические свойства аналитических двумерных WA-систем функций.....	109
Выводы.....	112
Глава 4.	
Обработка радиолокационных сигналов и синтезирование апертуры антенны атомарными функциями.....	113
4.1. Обработка сигналов в радиоприемном устройстве.....	113
4.2. Цифровая обработка сигналов в антеннах с синтезированной апертурой при боковом обзоре.....	118
4.2.1. Геометрия синтезирования апертуры.....	118
4.2.2. Формула дальности.....	119
4.2.3. Сигналы в системах синтезирования апертуры.....	120
4.2.4. Двухэтапная цифровая обработка сигналов РСА.....	122
4.3. Применение функций Кравченко — Кайзера к задачам весового усреднения разностной частоты.....	123
4.4. Обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах.....	125
4.5. Атомарные и WA-системы функций в корреляционной обработке радиолокационных сигналов.....	135

4.5.1. Фильтрация корреляционной функции с помощью атомарных и WA-систем функций.....	141
Выводы.....	149
Глава 5.	
Комбинированный алгоритм описания сложных контурных объектов и фильтрации изображений в условиях помехи высокой интенсивности.....	150
Введение.....	150
5.1. Выделение контуров объектов из изображений.....	152
5.2. Линейная фильтрация изображений в задаче выделения контуров.....	155
5.3. Подчеркивание границ объектов на изображении.....	155
5.4. Выделение границ при обработке изображений. Согласованно- избирательный фильтр.....	156
5.5. Контурные сигналы. Уравнение чертежа.....	161
5.5.1. Кодирование контурных бинарных изображений.....	161
5.5.2. Классификация контурных сигналов.....	164
5.5.3. Элементарные контуры.....	164
5.5.4. Сложный геометрический объект и его аналитическое описание.....	164
5.6. Численный эксперимент.....	166
Выводы.....	169
Заключение.....	170
Список литературы.....	171
Информация об авторах.....	179

Contents

Introduction	11
The list of acronyms	15
Chapter 1.	
Atomic functions in the filtering and digital signal processing problems	16
1.1. The main systems of atomic functions and their physical characteristics	16
1.1.1. The family of atomic functions $\text{fup}_N(x)$	16
1.1.2. The family of atomic functions $h_a(x)$	17
1.1.3. Physical characteristics	19
1.2. Construction of weight functions and the improvement of their physical characteristics	21
1.2.1. Kravchenko — Kaiser weight functions	21
1.2.2. Kravchenko — Nuttall weight functions	22
1.3. Design of FIR filters based on atomic functions	24
1.3.1. Filters with linear phase characteristics	24
1.3.2. Types of FIR-filters with linear phase characteristics	25
1.3.3. The development of FIR-filters	25
1.3.4. Construction of filter with finite impulse response	26
1.4. Generalized sampling series	30
1.4.1. Generalized sampling series based on atomic functions	31
1.4.2. The physical meaning of the generalized sampling series	32
1.4.3. Kravchenko — Kotelnikov weight function	35
1.4.4. The generalized Kravchenko — Kotelnikov sampling theorem for random signals	39
1.4.5. Analysis of particular cases of the generalized sampling series	40
1.4.6. The accounting errors of the generalized sampling theorem	45
1.4.7. The Kravchenko — Levitan core of the sampling series	47
1.5. Nonparametric estimation of probability density function of a sequence of random variables	49
1.5.1. Admissible valuation of the probability density function and its derivatives	51
1.5.2. Numerical experiment	53
Conclusions	56
Chapter 2.	
The application of WA-systems of functions in problems of physics	57
2.1. The construction of orthogonal WA-systems of functions	57
2.1.1. Orthogonal WA-systems of functions $\{\tilde{\text{up}}(t)\}$	57
2.1.2. The Kravchenko algorithm for constructing orthogonal WA-systems of functions	64
2.1.3. The construction of orthogonal WA-systems of functions on the basis of atomic functions $h_a(x)$	65
2.2. Orthogonal WA-systems of functions in digital processing of signals and images	67
2.2.1. Noise removal and compression one-dimensional signals	67

2.2.2. Noise removal and image compression	69
2.3. Analytical WA-systems of functions	74
2.3.1. Construction of complex WA-systems of functions	74
2.3.2. The functionality of the quality of the selection wavelet basis for signal analysis	77
2.3.3. Time series analysis of complex WA-systems of functions	77
Conclusions	83
Chapter 3.	
Synthesis of multidimensional digital filters	84
3.1. The theory of R-functions and inverse problem analytic geometry	84
3.2. Synthesis of two-dimensional digital filters with custom geometry reference area	89
3.2.1. Two-dimensional digital filters with finite impulse response	89
3.2.2. The loci of complex shape and the reference region two-dimensional digital filters with finite impulse response	91
3.2.3. The construction of a two-dimensional filter with infinite impulse response	91
3.2.4. Numerical implementation of the algorithm and analysis physical results	93
3.3. Two-dimensional analytical WA-systems of functions and their physical properties	105
3.3.1. Constructing an analytical two-dimensional WA-systems of functions	105
3.3.2. Physical properties analytical two-dimensional WA-systems of functions	109
Conclusions	112
Chapter 4.	
Processing of radar signals and synthetic aperture antenna atomic functions	113
4.1. Signal processing in the receiver	113
4.2. Digital signal processing in antennas synthetic aperture side overview	118
4.2.1. Geometry of synthetic aperture	118
4.2.2. The range equation	119
4.2.3. The signals in the system of synthetic aperture	120
4.2.4. A two-stage digital signal processing RSA	122
4.3. Application functions Kravchenko — Kaiser to problems of weight averaging of the difference frequency	123
4.4. A generalization of the ambiguity function of time and frequency based on the family of atomic functions in the digital signal processing in antenna systems	125
4.5. Atomic and WA-systems of functions in the correlation processing of radar signals	135
4.5.1. Filtering of the correlation function with atomic and WA-systems of functions	141
Insights	149

Chapter 5.

The combined algorithm description for complex contour object and filter images in conditions of disturbance, high intensity	150
Introduction.....	150
5.1. Contours extraction of objects from images.....	152
5.2. Linear filtering of images in the problem of the peaking.....	155
5.3. Underline the boundaries of objects in the image.....	155
5.4. Edge detection in image processing. Consistently selective filter.....	156
5.5. Contours as discrete signals. The equation of drawing.....	161
5.5.1. The contour coding of binary images.....	161
5.5.2. Classification of contour signals.....	164
5.5.3. Elementary circuits.....	164
5.5.4. Complex geometric object and its analytical description.....	164
5.6. Numerical experiment.....	166
Conclusions.....	169
Conclusions	170
Bibliography	171
Information about the authors	179

Введение

В последние десятилетия благодаря развитию вычислительной техники системы и методы цифровой обработки сигналов [1–9] активно развиваются в различных областях физики и техники. Они основаны на преобразованиях сигналов в цифровой форме и обладают таким полезным качеством, как универсальность алгоритмов. Этим объясняется [1–31] их широкое распространение в радиоастрономии, дистанционном зондировании природных сред, моделировании прохождения импульсов в слоистых структурах, ионосфере, тропосфере, обработке многомерных сигналов, распознавании образов и др.

Для многих из этих задач требуется обработка данных в режиме реального времени. Это достигается путем увеличения вычислительных мощностей, а также путем оптимизации алгоритмов используемых методов. Здесь важным является поддержание заданной точности вычислений в условиях ограниченности исходных данных, а также при воздействии мешающих факторов. Поэтому [1–31] широко применяются цифровые методы фильтрации, сжатия, спектрального оценивания, весовой обработки, восприятия информации и распознавания образов многомерных данных.

Благодаря широкому применению новых методов в цифровой обработке сигналов активно развивается современная радиолокация [10–24]. Так как радиолокационные системы (РЛС) относятся к классу радиотехнических систем извлечения информации об объектах в пространстве из принимаемого электромагнитного сигнала, то осуществляется поиск и обнаружение электромагнитного сигнала с последующим измерением его параметров, которые можно использовать для получения необходимой информации.

В основе радиолокации [10–12] лежат следующие основные физические принципы: рассеяние радиоволн объектами, отличающимися своими физическими параметрами от соответствующих характеристик среды распространения, излучение радиоволн техническими системами, а также эффектом Доплера, заключающимся в изменении частоты отраженного сигнала от движущихся объектов. Одним из важных направлений радиолокации является радиовидение, целью которого является наблюдение объектов в радиодиапазоне электромагнитных волн с разрешением, близким к оптическим системам.

Очевидным преимуществом радиолокационных [10–22] систем является способность работать в любое время суток при различных погодных условиях. Для реализации высокого разрешения применяется метод радиолокационного синтезирования апертуры (РСА) [10], позволяющий использовать когерентные режимы работы антенны для формирования существенно улучшенной диаграммы направленности. В когерентных радиолокационных системах используется информация об изменении параметров амплитуды и фазы

отраженного сигнала. Когерентный приемопередающий тракт РСА состоит из следующих блоков: формирования зондирующего сигнала, усиления, преобразования промежуточной частоты, фазовых детекторов, аналого-цифровых преобразователей.

Эффективность РЛС в основном определяется видом используемых в ней зондирующих сигналов (ЗС) [10–22], выбор которых зависит от конкретных требований к системе по дальности действия, разрешающей способности, качеству обнаружения, а также точности оценивания координат и параметров целей. Высокая разрешающая способность по дальности может обеспечиваться использованием широкополосных зондирующих сигналов. Важными являются мощность излучаемого сигнала, малые потери и шумы приемопередающего тракта. Большой динамический диапазон радиолокационного изображения обеспечивается фокусировкой главного и низким уровнем боковых лепестков функции неопределенности зондирующего сигнала.

При разработке и проектировании РЛС необходимо учитывать множество их параметров в целях улучшения качества работы систем. Поэтому основу цифровой обработки многомерных сигналов [1–37] должны составлять современные вычислительные методы и многопараметрические алгоритмы, позволяющие варьировать физические характеристики, а также режимы работы РЛС в целом. К ним можно отнести кратномасштабный вейвлет-анализ [6–8, 29], который благодаря локальным свойствам в пространственной и частотной областях обладает существенными преимуществами перед преобразованиями Фурье. Вейвлет-анализ оказывается очень эффективным [6–8] при исследовании знакопеременных, разрывных и нестационарных сигналов.

Существенное улучшение обработки могут обеспечить многомерные весовые функции и вейвлеты [8, 20–31, 37] со специальными формами опорных областей. В настоящее время в основном используются такие канонические формы, как эллипс и прямоугольник, в силу простоты их построения. Современные методы R-функций (функций В.Л. Рвачева) [19–25, 31, 37] позволяют на аналитическом уровне с привлечением алгебры логики описывать объекты сложной геометрии. Это позволяет в режиме реального времени учитывать пространственные особенности объектов, окружающей среды и подстилающих поверхностей.

Актуальность темы. В связи с активным развитием современных цифровых систем обработки информации актуальным является создание новых и улучшение существующих алгоритмов цифровой обработки одномерных и многомерных сигналов в радиолокационных станциях, которые основаны на современных вычислительных методах в следующих радиофизических приложениях: радиоастрономия, дистанционное зондирование, моделирование прохождения сигналов в слоистых структурах, ионосфере и тропосфере. К ним можно отнести

развитие методов весовой обработки, вейвлет-анализ, который нашел широкое применение при обнаружении кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов, а также конструктивные возможности R-функций для описания многомерных объектов произвольной геометрии.

Такие важные характеристики современных радиолокационных станций, как разрешающая способность радиолокационных изображений, точность измерения координат и скорости объектов, помехоустойчивость, определяются характеристиками зондирующих сигналов, а также алгоритмами обработки радиолокационных данных.

Так, высокая разрешающая способность по дальности может обеспечиваться использованием широкополосных зондирующих сигналов, а большой динамический диапазон радиолокационного изображения обеспечивается фокусировкой главного и низким уровнем боковых лепестков функции неопределенности зондирующего сигнала.

Снижение уровня боковых лепестков достигается использованием согласованной фильтрации и весовой обработки. В этом случае снижение боковых лепестков основывается на сглаживании переходных процессов модуляции зондирующих сигналов при формировании и обработке. Так, использование широкополосных и сверхширокополосных зондирующих сигналов может обеспечить высокую разрешающую способность по дальности.

Целью монографии является исследование, развитие и разработка методов анализа физических систем на основе теорий атомарных, R- и WA-систем функций, построение алгоритмов обработки и моделирования процессов дистанционного зондирования и радиоастрономии в целях улучшения физических характеристик передачи, восстановления и распознавания многомерных сигналов.

Структура монографии. Монография состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Основные результаты работы изложены в выводах, которые находятся в конце каждой главы, а также в заключении.

В первой главе рассмотрены методы весовой обработки радиолокационных сигналов, конструкции весовых функций, а также улучшение их физических характеристик. Построены новые конструкции КИХ-фильтров на основе атомарных функций и проведен их физический анализ. Исследованы обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций. Рассмотрено непараметрическое оценивание функции плотности вероятности и ее производных 1-го и 2-го порядков последовательностей случайных величин с помощью предложенных допустимых весовых функций.

Во второй главе рассмотрено построение ортогональных WA-систем функций и их применение в цифровой обработке сигналов и изображений различной физической природы. Построены аналитические WA-системы функций,

функционал качества выбора вейвлетного базиса для анализа сигналов. Полученные системы применены для анализа временных рядов радиоастрономических и климатических данных.

Третья глава посвящена теории R-функций и синтезу многомерных цифровых фильтров Кравченко — Рвачева со сложной геометрией опорных областей. Предложен алгоритм, а также построены двумерные фильтры с конечной импульсной характеристикой и аналитические двумерные WA-системы функций.

В четвертой главе проведено исследование возможности применения предложенных весовых функций к цифровой обработке сигналов в радарх с синтезированной апертурой. Рассматривается применение функций Кравченко — Кайзера к задачам весового усреднения разностной частоты. Предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах. Дан анализ ее основных физических свойств.

Рассмотрены комбинированные методы корреляционной обработки радиолокационных сигналов, основанные на теории атомарных и WA-систем функций. Предложены алгоритмы их оптимальной обработки, дискретной когерентной фильтрации, а также определения доплеровской частоты. Построен функционал качества, позволяющий оценить эффективность обработки сигналов для конкретных физических моделей.

В пятой главе предложен и обоснован гибридный метод выделения контуров зашумленных изображений, основанный на применении атомарных функций, вейвлетов, контурных сигналов и функций В. Л. Рвачева. В процессе обработки изображения происходят выделение основных контуров и их корректировка. На основе информации о контурах изображения производится глубокая фильтрация и восстановление областей изображения, близких к контуру. Проведенные численные эксперименты показали эффективность и надежность его применения в условиях помехи высокой интенсивности.

Список используемых сокращений

АФ	—	атомарная функция
АвФ	—	автокорреляционная функция
АМ	—	амплитудная модуляция
ВФ	—	весовая функция
ИСКО	—	интегральная среднеквадратичная ошибка
ИХ	—	импульсная характеристика
КМА	—	кратномасштабный анализ
КК	—	Кравченко — Котельников
КЛ	—	Кравченко — Левитан
КИХ	—	конечная импульсная характеристика
ЛЧМ	—	линейная частотная модуляция
ЛА	—	летательный аппарат
ОАК	—	открытый атмосферный канал
ПФ	—	преобразование Фурье
РЛИ	—	радиолокационное изображение
РСА	—	радар с синтезированием апертуры
СРЧ	—	сигнал разностной частоты
СШП	—	сверхширокополосный
ФН	—	функция неопределенности
ФНК	—	функция неопределенности Кравченко
ФПВ	—	функция плотности вероятности
ФСП	—	функция спектральной плотности
ЦОС	—	цифровая обработка сигналов
ЧМ	—	частотно-модулированный
ЧХ	—	частотная характеристика
ЭК	—	элементарный контур
ЭВ	—	элементарный вектор

ГЛАВА I

АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ И ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Рассмотрены методы весовой обработки радиолокационных сигналов, конструкции весовых функций и улучшение их физических характеристик [8–37]. Исследованы обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций [28, 37–41]. Построены новые конструкции КИХ-фильтров [28, 37–41] и проведен их физический анализ. Рассмотрено непараметрическое оценивание функции плотности вероятности и ее производных 1-го и 2-го порядков последовательностей случайных величин с помощью предложенных весовых функций [28, 42–53].

1.1. Основные системы атомарных функций и физические характеристики

Рассмотрим [8, 23, 28] кратко основные используемые в монографии атомарные функции (АФ).

1.1.1. Семейство атомарных функций $\text{fup}_N(x)$

Атомарная функция $\text{fup}_N(x)$ составляется из свертки финитного сплайна N -го порядка $\theta_N(x)$ и функции $\text{up}(x)$:

$$\text{fup}_N(x) = 2\theta_N(x) * \text{up}(2x) = \theta_{N-1}(x) * \text{up}(x), \quad (1.1)$$

причем $\text{fup}_0(x) \equiv \text{up}(x)$.

Функцию $\text{fup}_N(x)$ можно записать с помощью интеграла Фурье

$$\text{fup}_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) \left(\text{sinc}\left(\frac{u}{2}\right) \right)^N \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}(u2^{-k}) du, \quad (1.2)$$

где $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$.

В отличие от финитного сплайна $\theta_N(x)$, имеющего не более $N-1$ непрерывных производных, функция (1.2) является бесконечно дифференцируемой. Для каждого N она четная, положительная, с носителем $[-(N+2)/2; (N+2)/2]$ и охватывает единичную площадь:

$$\int_{-(N+2)/2}^{(N+2)/2} \text{fup}_N(x) dx = 1. \quad (1.3)$$

Производная $\text{fup}_N(x)$ может быть выражена через $\text{fup}_{N-1}(x)$ как

$$\text{fup}'_N(x) = \text{fup}_{N-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \text{fup}_{N-1}\left(x - \frac{1}{2}\right). \quad (1.4)$$

1.1.2. Семейство атомарных функций $h_a(x)$

Атомарные функции $h_a(x)$ являются финитными решениями функционально-дифференциального уравнения вида

$$y'(x) = \frac{a^2}{2}(y(ax+1) - y(ax-1)), \quad (1.5)$$

где a — любое действительное число, $a > 1$. Функция запишется как

$$h_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{u}{a^k}\right) du. \quad (1.6)$$

При $a = 2$ получаем частный случай $h_2(x) \equiv \text{cp}(x)$. Основными свойствами функции $h_a(x)$ являются следующие:

1. Компактность носителя $h_a(x) \equiv 0 \quad \forall x \notin \left[-\frac{1}{a-1}; \frac{1}{a-1}\right], a > 1$.

2. Наличие плоской вершины $h_a(x) = \frac{a}{2}$ на отрезке

$$x \in \left[-\frac{a-2}{a(a-1)}; \frac{a-2}{a(a-1)}\right], \quad a > 2.$$

3. Координаты центров отрезков возрастания и убывания $\left(\mp \frac{1}{a}, \frac{a}{4}\right)$ (при $a \geq 1,5$).

4. Преобразование Фурье-функции $h_a(x)$ имеет следующий вид:

$$\hat{h}_a(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k}\right). \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) обращается в нуль в точках $\omega = a^k \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. В практических расчетах достаточно ограничиться небольшим числом

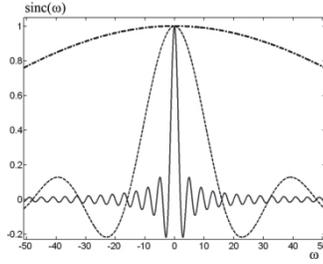


Рис. 1.1. Поведение функции $\text{sinc}(\omega/2^k)$ для $k = 1$ (сплошная линия), $k = 4$ (пунктирная линия), $k = 7$ (штрих-пунктирная линия)

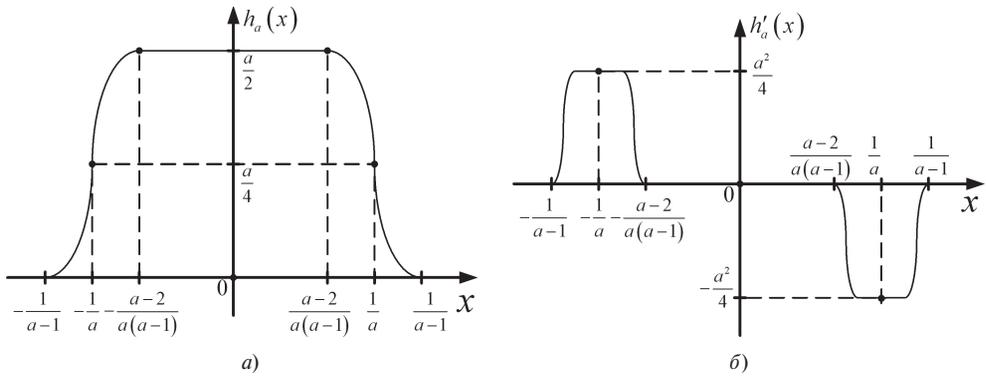


Рис. 1.2. Характер поведения атомарной функции $h_a(x)$ (а) и ее производной (б)

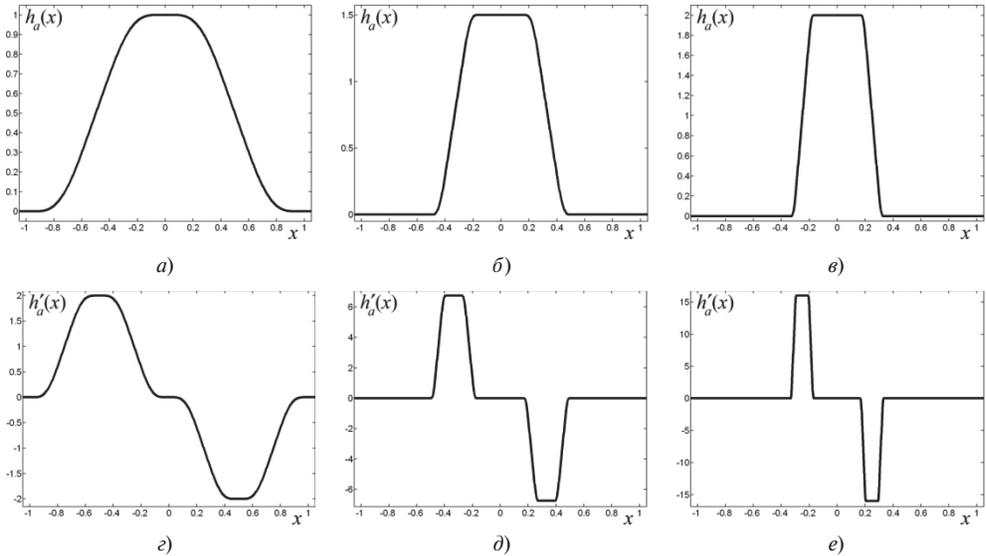


Рис. 1.3. Поведение атомарной функции $h_a(x)$ (а, б, в) и ее первой производной (г, д, е) для $a = 2, 3, 4$

членов бесконечного произведения (1.7), так как они с ростом k стремятся к единичному значению (см. рис. 1.1).

5. Производные $h_a(x)$ выражаются через сдвиги-сжатия самой функции рекуррентно с помощью соотношения

$$h_a^{(n)}(x) = 2^{-n} a^{\frac{n(n+3)}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k h_a \left(a^n x + \sum_{j=1}^n a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)} \right), \quad (1.8)$$

где $\delta_1 = 1$, $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, а $p_j(k)$ — число, стоящее в j -м разряде двоичного разложения числа k , то есть $p_j(k) = [k \cdot 2^j] \bmod 2$.

На рис. 1.2 поясняются свойства 1–3. Графики поведения функций $h_a(x)$ и ее первой производной представлены на рис. 1.3.

1.1.3. Физические характеристики

Для исследования весовых функций и анализируемых сигналов используются модифицированные физические характеристики [8].

Показатель широкополосности μ задается соотношением $\mu = 2 \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}}$,

где f_{\min} , f_{\max} — минимальная и максимальная частоты функции спектральной плотности сигнала $w(t)$, которые определяются по уровню убывания функции спектральной плотности $W(f)$ (ФСП) в e раз относительно ее главного максимума. Для функций, у которых $\Phi(0) \neq 0$, как и для любого видеосигнала, $\mu = 2$. Под СШП-сигналом понимают сигнал, показатель μ которого удовлетворяет условию: $\mu_{\min} \leq \mu < 2$, где $\mu_{\min} = 1$.

Центральная частота функции спектральной плотности. Она является вторым основным параметром при описании сигналов и определяется как

$$f_0 = \frac{1}{2}(f_{\min} + f_{\max}). \text{ Для } W(f), \text{ у которой } f_{\min} = 0 \text{ имеем } f_0 = f_{\max} / 2.$$

Относительное положение максимума ФСП определяется как $\gamma_1 = f_m / f_0$, где f_m — частота главного максимума.

Относительное положение первого нуля ФСП. Для $w(t)$ под частотой первого нуля ν понимается такое минимальное значение частоты f , при котором $W(\nu) = 0$. Для вейлет-функции дополнительно требуется $\nu \neq 0$.

Тогда

$$\gamma_2 = \frac{\nu - f_m}{f_{\max} - f_{\min}}.$$

Это выражение отличается от приведенного в [2]. В данной ситуации γ_2 определяется так, чтобы функционал качества являлся инвариантным относительно параметра масштабирования a .

Относительная ширина ФСП по уровню 3 дБ. Этот параметр представляет собой уровеньный показатель широкополосности