МИР

цифровой обработки

В.П. ДВОРКОВИЧ
А.В. ДВОРКОВИЧ

Оконные функции для гармонического анализа сигналов

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2014

УДК 519.6:621.391
ББК 32.811
Д24

Д24 Дворкович В.П., Дворкович А.В.
Оконные функции для гармонического анализа сигналов
М.: Техносфера, 2014. – 112с. ISBN 978-5-94836-373-8

Книга содержит сведения о классических оконных функциях и их параметрах, а также предложенные авторами новые методы синтеза оконных функций с применением следующих алгоритмов:

- минимизации спектральных составляющих оконных функций вне пределов заданного интервала;
- минимизации различий формы и спектра оконных функций;
- максимизации скорости спада уровней боковых лепестков спектра оконных функций;
- перемножения относительных спектров оконных функций.

В Приложениях приводятся описания методов синтеза оптимальных сигналов, ограниченных по спектру и практически ограниченных по длительности, и синтеза сигналов, форма которых совпадает с огибающей их спектра, разработанные на базе алгоритмов вычисления новых оконных функций.

УДК 519.6:621.391
ББК 32.811

ISBN 978-5-94836-373-8

Елене Антоновне Дворкович,
любимой жене и маме посвящается

Содержание

Предисловие рецензента 7

Глава 1
Введение 11

Глава 2
Основные параметры оконных функций 15

Глава 3
Классические оконные функции 23

Глава 4
Сконструированные оконные функции 35

Глава 5
Оконные функции Кравченко 47

Глава 6
Синтез новых высокоэффективных оконных функций 51

6.1. Алгоритм минимизации спектральных составляющих оконной функции вне пределов заданного интервала 52
6.2. Алгоритм минимизации различий формы и спектра оконной функции 56
6.3. Алгоритм максимизации спада уровней боковых лепестков спектра оконной функции 63
6.4. Использование метода перемножения относительных спектров оконных функций 71

Приложение 1
Синтез оптимальных сигналов, ограниченных по спектру и практически ограниченных по длительности 85

Приложение 2
Синтез сигналов, форма которых совпадает с огибающей их спектра 97

Литература 104

Viktor Dvorkovich, Alexander Dvorkovich

WINDOW FUNCTIONS FOR FOURIER ANALISYS OF SIGNALS

The book contains information about the classic window functions and their parameters, as well as new methods of window functions synthesis proposed by the authors. The new methods use the following algorithms:

- minimization of spectral components of window functions outside of given interval;
- minimization of the differences between the shape and the spectrum of window functions;
- maximization of window function sidelobes fall off;
- multiplication of relative spectrums of window functions.

The Appendices contains a description of the methods for synthesis of optimal signals with limited spectrum and practically limited in duration, and synthesis of signals with the shape coinciding with the envelope of its spectrum. The methods were developed on the basis of algorithms for computing the new window functions.

Table of contents

Foreword of reviewer 7
Chapter 1. Introduction 11
Chapter 2. General parameters of window functions 15
Chapter 3. Classic window functions 23
Chapter 4. Constructed window functions 35
Chapter 5. Kravchenko window functions 47
Chapter 6. Synthesys of new higly effective window functions 51
6.1. Algorithm of minimization of spectral components of window functions outside of given interval 52
6.2. Algorithm of minimization of the differences between the shape and the spectrum of window functions 56
6.3. Algorithm of maximization of window function sidelobes fall off 63
6.4. Utilization of the method of multiplication of window functions relative spectrums 71
Appendix 1. Synthesis of optimal signals with limited spectrum and practically limited in duration 85
Appendix 2. Synthesis of signals with the shape coinciding with the envelope of its spectrum 97
References 104

Предисловие рецензента

Оконные функции используются в большинстве задач цифровой обработки сигналов, поскольку нет возможности исследовать эти сигналы на бесконечном интервале времени. Ограничение интервала анализа сигналов также зачастую обусловлено их нестационарностью. По этой причине особое внимание уделяется использованию оконных функций при разработке кодирующих систем аудиосигналов и анализа соответствий объективного и субъективного их восприятия.

Использование оконного сглаживания позволяет рассчитывать КИХ-фильтры под любые практические задачи для уменьшения эффекта Гиббса и улучшения характеристик фильтра с аппроксимацией комплексного коэффициента передачи при линейной ФЧХ.

Особая область применения оконных функций — разработка адаптивных антенных решеток, у которых параметры и, в частности, характеристика диаграммы направленности изменяются автоматически для обеспечения наилучших или приближающихся к наилучшим условий приема полезного сигнала на фоне постоянно меняющихся воздействий (помех). Выбранные оконные функции применяются в качестве весового коэффициента к диаграмме направленности антенной решетки при синтезе системы с заданной частотной фильтрацией.

Казалось: после публикации работы F.J. Herris «On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform» (Proceedings of the IEEE, vol. 66, No. 1, January 1978) и ее перевода на русский язык в журнале ТИИЭР (т. 66, 1978, № 1) возможно ли разработать новые принципы построения оконных функций?

Эти публикации содержат подробную информацию о параметрах и применении для обработки сигналов с использованием БПФ классических оконных функций, начиная с прямоугольного окна Дирихле и треугольного окна Файера–Бартлетта до окон Хеннинга и Блекмана–Херриса, а также оконных функций, сконструированных в виде произведений, сумм и сверток различных функций, в виде отдельных участков известных окон различными авторами.

Для качественного спектрального анализа необходимо выбрать оконную функцию так, чтобы уровень боковых лепестков ее спектра был меньше динамического диапазона сигнала, а также определить размер выборки БПФ для обеспечения требуемого разрешения по частоте исходя из частоты дискретизации и свойств выбранной оконной функции.

Поскольку все виды оконных функций симметричны относительно середины временного интервала и ограничены по длительности этим интервалом, они представимы в виде суммы ортогональных косинусоидальных базисных функций с периодами, кратными этому заданному интервалу.

С использованием этого однозначного представления окон авторы разработали несколько вариантов создания новых оконных функций и оптимизации их параметров.

Один из них основан на использовании алгоритма минимизации спектральных составляющих оконной функции вне пределов заданного нормированного частотного интервала $[-C, C]$. С увеличением интервала максимальный боковой лепесток Фурье-образа оконной функции W_{max} плавно уменьшается (от -26 дБ при $C = 1$ до -188 дБ при $C = 7$).

Несмотря на большое изменение параметра C, коэффициент δ, являющийся показателем качества оконной функции, изменяется незначительно — от 4,7% при $W_{\max} = -26$ дБ до 6% при $W_{\max} = -188$ дБ. Приведена таблица параметров оконных функций, рассчитанных путем минимизации мощности его спектральных компонент вне пределов заданного интервала частот.

Синтез оконных функций, основанный на минимизации мощности его спектральных компонент вне пределов заданного интервала частот, позволяет реализовать как известные стандартные оконные функции, так и ряд новых функций с очень низким уровнем боковых лепестков, пригодных для анализа сигналов с весьма малым уровнем мощности. Приведены подробные таблицы параметров таких оконных функций.

Другой предложенный способ расчета оконных функций основан на использовании алгоритма минимизации различий формы окна и его нормированного спектра.

Приведены таблицы параметров оконных функций, рассчитанных путем минимизации различий формы окна и его спектра при различном числе используемых ортогональных базисных функций M — от 1 до 9. При этом различие форм окна и его спектра составляет от 2,5% до $0{,}4\cdot10^{-10}$%, а максимальный боковой лепесток Фурье-образа оконной функции уменьшается от $-31{,}5$ дБ до -253 дБ. Коэффициент δ, являющийся показателем качества оконной функции, также мало изменяется — от 4,12% при $W_{\max} = -31{,}5$ дБ до 6,09% при $W_{\max} = -253$ дБ.

В ряде случаев интерес представляют оконные функции с максимально возможной скоростью спада боковых лепестков ее спектра.

Авторами предложен метод расчета таких окон с применением алгоритмов максимизации спада уровней боковых лепестков их спектра.

Одним из вариантов таких функций являются косинусоидальные временные функции четных степеней $2n$, при этом в случае увеличения коэффициента от значения n к $n+1$, спад боковых лепестков уменьшается на 12 дБ.

Приведены таблицы параметров оконных функций, рассчитанных при максимизации спада уровней боковых лепестков их спектра от $n = 1$ до $n = 10$ при изменении скорости спада боковых лепестков спектра окна с -12 дБ до -126 дБ на октаву.

Разработанный алгоритм минимизации спектральных составляющих оконной функции вне пределов заданного интервала аналогичен используемому алгоритму построения оптимальных измерительных сигналов, приведенному в Приложении 1.

В ряде случаев в измерительных системах требуется реализация ограниченных по длительности и практически финитных по спектру сигналов.

Очевидно, что финитная по спектру функция, состоящая из суммы составляющих $a_n \mathrm{sinc}\,(\pi\,(x-n))$ не может быть ограничена конечным временным интервалом, но при рационально подобранных коэффициентах a_n может оказаться, что при финитности спектра эта функция может быть почти ограниченной по длительности на некотором интервале $[x_1, x_2]$, когда изменения одних членов конечного ряда вне пределов указанного интервала практически компенсируются изменениями других членов этого ряда.

Синтез оптимального сигнала для оценки импульсных характеристик каналов связи реализован с использованием рассмотренных критериев путем численного анализа результатов расчета при различных значениях параметра ограничения спектра C и различном числе членов ряда, аппроксимирующих функцию. Приведены параметры оптимального измерительного сигнала для разных значений параметра C, показано, что такой сигнал практически нечувствителен к ограничению полосы пропускания до его номинальной частоты и несколько более чувствителен к искажениям частотных характеристик ТВ-канала в полосе его пропускания.

Использование импульсного способа оценки каналов связи не исключает измерений его частотных характеристик, поскольку погрешности в оценке импульсной характеристики могут привести к существенным локальным искажениям гармонических характеристик (и наоборот). По этим причинам целесообразным способом оценки свойств ТВ-канала является не только измерение формы импульсного сигнала, но и оценка его спектра, что достаточно просто реализуется с использованием сигналов, форма которых совпадает с огибающей их спектра.

Проблемы синтеза таких сигналов симметричной и кососимметричной формы изложены в Приложении 2. Показано, что проблема одновременной оценки импульсных и гармонических каналов связи решается достаточно эффективно, если используются разработанные сигналы.

В этом случае при одновременном воспроизведении на экране индикатора формы импульсного сигнала и огибающей его спектра при безыскаженной передаче указанные кривые должны совпадать. При искажении частотных характеристик канала формы сигнала и огибающей его спектра отличаются друг от друга, причем чувствительность относительного изменения указанных кривых может быть весьма существенной, что повышает точность оценки линейных свойств канала связи. Приведены результаты расчетов изменения формы оптимального сигнала и его спектра при различных искажениях АЧХ и ФЧХ канала связи.

Следует подчеркнуть, что данный труд авторов фундаментальных исследований, широко используемых в цифровой обработке информации, удивительно сочетается с множеством факторов, придающих ему важную значимость для дальнейших исследований и практического использования.

Доктор технических наук, профессор,
лауреат Государственной премии РФ,
заслуженный работник высшей школы РФ
Митрохин В.Н.

ГЛАВА I

Введение

Основной задачей обработки сигналов с использованием оконных функций является анализ их параметров на ограниченном интервале времени при наличии различного рода помех. Для такого анализа часто используют дискретное преобразование Фурье (ДПФ), обеспечивающее разложение сигнала по базису, состоящему из простых косинусоидальных и синусоидальных функций.

Обрабатываемый сигнал на заданном интервале преобразуется в N эквидистантных отсчетов, а его гармонические оценки получаются с помощью ДПФ, определяющего N соответствующих спектральных составляющих. Для получения удовлетворительных результатов такого преобразования в случаях, когда длительность сигнала не соответствует выбранному интервалу обработки или если период следования сигнала не кратен этому интервалу, используются различные оконные функции, реализующие сглаживание спектральных компонент. Следует отметить, что применение ДПФ предполагает периодическое продолжение сигнала вне интервала обработки [1].

Таким образом, оконные функции, или окна, представляют собой весовые функции, обеспечивающие уменьшение размывания спектральных компонент, связанного с конечностью интервала наблюдения. Влияние оконной функции приводит к существенному повышению гладкости исследуемого сигнала на границах его периодического продолжения, если обеспечивается равенство или близость к нулю максимального числа производных этой функции на границах выбранного интервала обработки.

Все виды оконных функций симметричны относительно середины временного интервала $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$ и ограничены по длительности этим интервалом. Следовательно, они могут быть представлены с использованием ортогональных косинусоидальных базисных функций с периодами, кратными интервалу T:

$$u(x) = \begin{cases} \left[1 + 2\sum_{m=1}^{M} a_m \cos(2\pi m x)\}\right]/S = \\ = b_0 + 2\sum_{m=1}^{M} b_m \cos(2\pi m x)\}, & |x| \leqslant 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \qquad (1)$$

где $S = 1 + 2\sum_{m=1}^{M} a_m$, $b_0 = 1/S$, $b_m = a_m/S$, N — число дискретных эквидистантных отсчетов сигнала на интервале T, $x = t/T$ — нормированный временной интервал. Следует заметить, что для классических оконных функций чаще всего используется $M \ll N/2$.

Нормированный спектр такой функции может быть представлен в виде:

$$F\left(y\right) = \mathrm{sinc}\left(\pi y\right) + \sum_{m=1}^{M} a_m\left[\mathrm{sinc}\left(\pi\left(y + m\right)\right) \ + \mathrm{sinc}\left(\pi\left(y - m\right)\right)\ \right], \quad (2)$$

где $\mathrm{sinc}\left(z\right) \ = \sin\left(z\right)\ /(z)$, $y{=}\omega T/(2\pi) = fT$ — нормированная частота, $|y| < \infty$.

Эквидистантные отсчеты оконной функции (1), взятые на интервале от 0 до T в точках $t_n = n\Delta T = nT/N$, определяются соотношением:

$$u\left(n\right) = \frac{1}{S}\left[1 + 2\sum_{m=1}^{M}\left(-1\right)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)\right], 0 \leqslant n \leqslant N - 1. \quad (3)$$

Поскольку при ДПФ предполагается периодическое продолжение последовательности (3), т.е. преобразуемая функция представима в виде суммы компонент $\ldots\ u(n-2N) = u(n-N) = u(n) = u(n+N) = = u(n+2N)\ \ldots$, спектральное окно ДПФ представимо в виде суммы нормированных ядер Дирихле $D\left(z\right) = e^{j\pi z/N}\frac{\sin(\pi z)}{N\sin(\pi z/N)}$:

$$F_{\text{ДПФ}}\left(y\right) = D\left(y\right) + \sum_{m=1}^{M}\left(-1\right)^m a_m\left[D\left(y + m\right) + D\left(y - m\right)\right]. \quad (4)$$

Формулы (2) и (4) совпадают при $N \to \infty$.

Поскольку оконная функция (1) строго ограничена на конечном временном интервале, ее Фурье-спектр (2) теоретически не может быть ограничен.

Предположим, что спектр сигнала $f(t)$ ограничен некоторой частотой $|\omega_{\text{гр}}| \leqslant \pi/\Delta T$, тогда в соответствии с теоремой Котельникова–Найквиста его можно описать эквидистантной последовательностью отсчетов $f\left(n\Delta T\right)$. Если ограничить эту последовательность на некотором конечном временно́м интервале $T = N\Delta T$, то при четном числе N ее спектр можно определить конечной суммой:

$$F\left(\omega_k\right) = \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} f\left(n\Delta T\right)e^{-j\omega_k n\Delta T}. \quad (5)$$

При сдвиге индекса суммирования на $N/2$ реализуется прямое ДПФ:

$$F(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N} f(n\Delta T)\, e^{-j\omega_k n\Delta T}, \qquad (6)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi}{N\Delta T}k = \frac{2\pi}{T}k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$.

Для оценки влияния окон на результаты преобразований предположим, что спектр сигнала определяется функцией $F(\omega)$, а спектр оконной функции равен $W(\omega)$. В таком случае результатом преобразования произведения сигнала и оконной функции является свертка спектров:

$$F_W(\omega) = F(\omega) * W(\omega). \qquad (7)$$

Это соотношение является ключом для оценки влияния конечной длины последовательности данных на результаты их обработки.

Предположим, в качестве оконной функции используется наиболее простое дискретное прямоугольное окно $w(n\Delta T)$, спектр которого $W(\omega)$ определяется ядром Дирихле [2]:

$$W(\omega) = e^{j\omega\Delta T/2} \frac{\sin(\omega\Delta T N/2)}{\sin(\omega\Delta T/2)} = e^{j\omega T/(2N)} \frac{\sin(\omega T/2)}{\sin(\omega T/(2N))}. \qquad (8)$$

Иначе, введя обозначения $\omega T = 2\pi f T = 2\pi y$, получим

$$W(y) = e^{j\pi y/N} \frac{\sin(\pi y)}{\sin(\pi y/N)},$$

и соотношение (7) представимо в виде $F_W(y) = F(y) * W(y)$.

Спектр этого окна имеет форму, изображенную на рис. 1.

Спектр свертки сигнала и окна $F_W(\omega)$ (7) на заданной частоте, например $\omega = \omega_0$, представляет собой сумму всех спектральных компонент, взвешенных спектральным окном с центром на частоте ω_0 (рис. 2) [2].

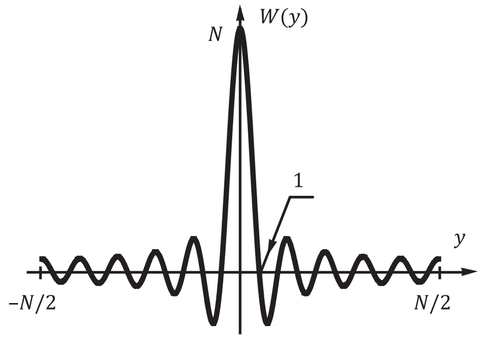

Рис. 1. Ядро Дирихле из последовательности N точек

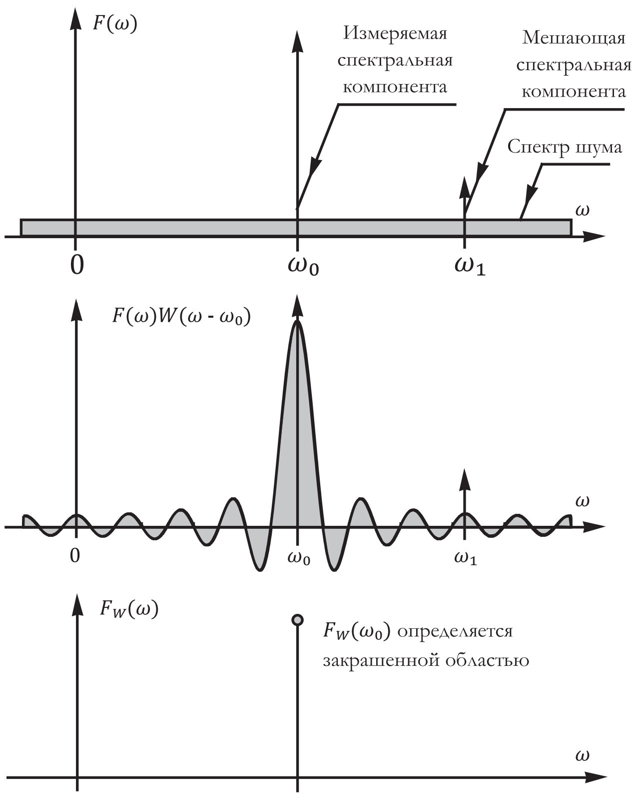

Рис. 2. Графическая интерпретация соотношения (7)