



# МИР Физики и техники

Методы расчета  
сложных вакуумных  
систем

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ  
С.Б. НЕСТЕРОВА,  
А.В. БУРМИСТРОВА

ТЕХНОСФЕРА

Москва

2012

**УДК 621.52(035,5)**  
**ББК 31.77 я 2**  
**М 54**

Авторы:

**Нестеров С.Б., Бурмистров А.В., Андросов А.В., Бронштейн М.Д.,  
Васильев Ю.К., Ерофеев А.И., Саликеев С.И.**

**М 54 Методы расчета сложных вакуумных систем:** С.Б. Нестеров, А.В. Бурмистров и др. Под общей редакцией С.Б. Нестерова, А.В. Бурмистрова.  
**Москва: Техносфера, 2012. — 375 с.**  
**ISBN 978-5-94836-337-0**

В книге рассматриваются методы расчета сложных вакуумных систем. Под сложной вакуумной системой понимается система, состоящая хотя бы из двух простых элементов. Книга утверждена на научно-техническом совете ФГУП «НИИВТ им. С.А. Векшинского» и рекомендована для научных сотрудников, аспирантов и студентов теплофизических и инженерно-физических специальностей.

**УДК 621.52(035,5)**  
**ББК 31.77 я 2**

© 2012, Нестеров С.Б.  
© 2012, ЗАО «РИЦ «Техносфера», оригинал-макет, оформление

**ISBN 978-5-94836-337-0**

# Содержание

<b>Введение</b> .....	9
<b>Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ</b> .....	10
<b>Глава 2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА</b> .....	16
2.1. Обзор методов .....	16
2.1.1. Классические аналитические методы .....	16
2.1.2. Развитие аналитических подходов в приложении к актуальным задачам вакуумной техники .....	19
2.1.3. Метод угловых коэффициентов .....	20
2.1.4. Метод эквивалентных поверхностей .....	20
2.1.5. Метод анализа газовых потоков путем решения кинетического уравнения Л. Больцмана .....	21
2.1.6. Метод Монте-Карло пробной частицы .....	22
2.2. Метод угловых коэффициентов .....	25
2.2.1. Основные понятия .....	25
2.2.2. Расчет угловых коэффициентов .....	26
2.2.3. Примеры решения задач методом угловых коэффициентов .....	35
2.3. Метод Монте-Карло пробной частицы для свободномолекулярного режима .....	45
2.3.1. Основные понятия .....	45
2.3.2. Описание общего алгоритма .....	46
2.3.3. Нахождение полярных диаграмм скоростей частиц .....	58
2.4. Нахождение пространственного распределения частиц .....	60
2.4.1. Типы угловых распределений .....	61
2.4.2. Учет времени полета частицы .....	63
2.4.3. Учет скорости частицы .....	64
2.4.4. Определение распределения концентрации и давления .....	66
2.4.5. Пример расчета параметров коаксиального трубопровода .....	69
2.5. Метод эквивалентных поверхностей .....	73
2.6. Метод балансовых уравнений .....	74
2.6.1. Аналитические соотношения .....	81
2.6.2. Расчет с помощью предложенного алгоритма коэффициента захвата крионасоса Marathon-8 .....	87

<b>Глава 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ</b> .....	90
3.1. Реальные вакуумные системы и их классификация .....	90
3.2. Проводимость сложного трубопровода в свободномолекулярном режиме .....	92
3.2.1. Основные понятия .....	92
3.2.2. Методы расчета общей проводимости сложного трубопровода .....	93
3.2.3. Алгоритм расчета проводимости по теореме аддитивности обратной проводимости .....	96
3.2.4. Сравнение значений суммарной проводимости при ее расчетах разными методами .....	97
3.2.5. Пример расчета сложного трубопровода .....	100
3.3. Расчет характеристик откачных систем .....	105
3.3.1. Расчет проводимости и коэффициента захвата криоловушки с учетом формирующегося криослоя .....	105
3.3.2. Расчет криоловушки .....	105
3.3.3. Измененная конструкция ловушки АТ-200 .....	107
3.3.4. Расчет и проектирование крионасоса .....	109
3.3.5. Анализ типовой конструкции крионасоса .....	110
3.3.6. Результаты предварительного сравнения с экспериментальными данными .....	110
3.3.7. Изменение коэффициента захвата системы по водороду в зависимости от переменных коэффициентов прилипания .....	111
3.3.8. Зависимость быстроты действия насоса от его геометрических характеристик .....	113
3.3.9. Зависимость быстроты действия от количества накопленной воды .....	114
3.3.10. Зависимость быстроты действия от количества накопленного аргона .....	115
3.3.11. Структура распределения частиц воды на экране крионасоса .....	116
3.3.12. Структура распределения частиц аргона на панелях II ступени .....	116
3.3.13. Пример расчета альтернативной конструкции насоса на основе имеющейся модели .....	113
3.3.14. Постановка задачи теплового расчета .....	119
3.3.15. Теплопритоки излучением .....	120
3.3.16. Теплота, выделяемая при конденсации .....	122
3.3.17. Теплота адсорбции .....	123
3.3.18. Теплопритоки через слой разреженного газа .....	123
3.3.19. Влияние щели в панели II ступени на ухудшение свойств теплового моста .....	126
3.3.20. Подведение итогов теплового расчета .....	128
3.4. Комплексное исследование системы откачки продуктов термоядерного синтеза ITER .....	128
3.4.1. Конструкция системы откачки .....	129

3.4.2. Расчеты быстроты действия .....	130
3.4.3. Расчеты теплопотоков через слой разреженного газа .....	132
3.4.4. Расчеты теплопотоков излучением .....	132
3.5. Анализ испытательных камер для определения характеристик откачных систем .....	134
3.5.1. Анализируемые структуры .....	135
3.5.2. Анализ характеристик потока на выходе из испытательной камеры .....	137
3.5.3. Анализ распределения давления внутри испытательных камер .....	139
<b>Глава 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>142</b>
4.1. Расчет профилей криослоев .....	142
4.2. Зависимости для определения профилей криослоев .....	143
4.3. Влияние микрогеометрии сорбентов на сорбционные характеристики крионасосов .....	164
4.3.1. Изучение характера поверхностей разных сорбентов .....	164
4.3.2. Моделирование фрагмента поверхности .....	167
4.4. Влияние углового распределения частиц на проводимость .....	170
4.4.1. Описание метода расчетов .....	171
4.4.2. Влияние закона распределения .....	172
4.4.3. Влияние значения коэффициента прилипания .....	180
4.4.4. Выводы .....	180
4.5. Анализ криовакуумных условий в зоне вакуумной изоляции катушек тороидального поля ИТЭР .....	181
4.5.1. Физические предпосылки и методология расчета .....	181
4.5.2. Общие условия расчетов .....	182
4.5.3. Расчет проводимости патрубков VVTS и лабиринтных соединений .....	185
4.5.4. Расчет распределения давления .....	187
4.5.5. Расчет фонового давления .....	189
4.5.6. VV—VVTS .....	189
4.5.7. VVTS .....	190
4.5.8. VVTS—TFC .....	191
4.5.9. VVTS—TFC с увеличенным значением плотности десорбционного потока с поверхности TFC .....	192
4.5.10. Выводы .....	193
<b>Глава 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА СМЕЖНЫХ ЗАДАЧ ВАКУУМНОЙ ТЕХНИКИ .....</b>	<b>194</b>
5.1. Исследование термомолекулярного эффекта .....	194
5.1.1. Расчет для случая двух сфер, соединенных диафрагмой .....	195
5.1.2. Расчет для случая двух сфер, соединенных трубопроводом .....	196
5.1.3. Влияние геометрии и температуры .....	196
5.1.4. Выводы .....	199

<b>Глава 6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ</b> .....	200
6.1. Разработка и модернизация вакуумных криогенных насосов .....	200
6.1.1. Конструкция и описание крионасосов .....	200
6.1.2. Анализ влияния геометрии экрана на его эффективность.....	202
<b>Глава 7. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОТКАЧНЫХ ХАРАКТЕРСТИК БЕСКОНТАКТНЫХ ВАКУУМНЫХ НАСОСОВ</b> .....	206
7.1. Общие положения .....	206
7.2. «Вакуумные» методы расчета откачных характеристик .....	207
7.3. Методы расчета, основанные на дифференциальных уравнениях, описывающих изменение параметров газа .....	219
7.4. Прямой поток в бесконтактных вакуумных насосах. Коэффициент использования рабочего объема .....	221
<b>Глава 8. ПРОВОДИМОСТЬ ЩЕЛЕВЫХ КАНАЛОВ В ВЯЗКОСТНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА</b> .....	224
8.1. Основные типы щелевых каналов бесконтактных вакуумных насосов .....	224
8.2. Методы расчета проводимости щелевых каналов, используемые в компрессорной технике .....	225
8.3. «Вакуумные» методы расчета проводимости.....	231
8.4. Экспериментальные исследования проводимости щелевых каналов в молекулярном, переходном и вязкостном режимах .....	234
8.5. Метод расчета проводимости щелевых каналов в ламинарном режиме течения при отношениях давлений на концах, близких к единице .....	237
8.6. Проводимость щелевых каналов в ламинарном режиме при произвольных перепадах давлений .....	243
8.6.1. Математическая модель. Проверка адекватности .....	243
8.6.2. Результаты численного решения и уравнения для расчета проводимости щелевых каналов, образованных цилиндрическими стенками .....	250
8.6.3. Результаты численного решения и уравнения для расчета проводимости плоской прямоугольной щели .....	257
<b>Глава 9. ПРОВОДИМОСТЬ ЩЕЛЕВЫХ КАНАЛОВ ПРИ МОЛЕКУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА</b> .....	260
9.1. Методы расчета проводимости щелевых каналов ДВН .....	260
9.2. Расчет проводимости щелевых каналов методом пробной частицы .....	265
9.2.1. Постановка задачи. Допущения. Проверка адекватности модели .....	265
9.2.2. Проводимость каналов, образованных цилиндрическими поверхностями .....	272
9.2.3. Проводимость канала, образованного эллипсом и окружностью .....	276

9.2.4. Проводимость радиального канала ДВН с подрезкой головки ротора .....	282
9.2.5. Проводимость межроторных каналов ДВН .....	283
<b>Глава 10. ПРОВОДИМОСТЬ ЩЕЛЕВЫХ КАНАЛОВ ПРИ МОЛЕКУЛЯРНО-ВЯЗКОСТНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА .....</b>	<b>291</b>
<b>Глава 11. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРОВОДИМОСТИ КАНАЛОВ БЕСКОНТАКТНЫХ ВАКУУМНЫХ НАСОСОВ .....</b>	<b>303</b>
<b>Глава 12. УЧЕТ ПОДВИЖНОСТИ СТенок КАНАЛОВ ПРИ РАСЧЕТАХ ОБРАТНЫХ ПЕРЕТЕКАНИЙ В БЕСКОНТАКТНЫХ ВАКУУМНЫХ НАСОСАХ .....</b>	<b>328</b>
12.1. Учет подвижности стенок каналов при молекулярном режиме течения газа .....	328
12.1.1. Общие положения .....	328
12.1.2. Проводимости радиальных каналов ДВН с окружным профилем ротора .....	331
12.1.3. Проводимости радиальных каналов ДВН с подрезкой ротора .....	335
12.1.4. Проводимости радиальных каналов ДВН с эллиптическим профилем ротора .....	336
12.1.5. Проводимости межроторных каналов ДВН .....	336
12.1.6. Проводимости торцевых каналов ДВН с движущимися стенками .....	338
12.2. Учет подвижности стенок каналов при молекулярно-вязкостном и вязкостном режимах течения газа .....	346
<b>Глава 13. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>351</b>
13.1. Введение .....	351
13.2. Общее описание метода и алгоритма .....	355
13.3. Физические модели. Расчетные процедуры .....	358
13.3.1. Столкновение частиц .....	359
13.3.2. Определение количества столкновений в ячейке .....	361
13.3.3. Перенумерация молекул .....	363
13.4. Особенности применения метода ПСМ в вакуумной технике .....	363
<b>Литература .....</b>	<b>382</b>



## Программный комплекс для расчета параметров вакуумных систем

### Простое определение конфигурации вакуумной системы

- определение конфигурации с помощью простых объектов (плоскости, цилиндры, конусы, сферы и т. п.);
- определение свойств каждой поверхности (коэффициенты прилипания, лучеиспускания, температура и т. п.), а также зон их действия;
- возможность группировки объектов для изменения свойств или создания готовых конгломератов — ловушки, крионасосы, которые можно сразу вставлять в систему целиком.

### Расчет вакуумных параметров системы в молекулярном режиме

- возможности анализа характеристик вакуумной системы в молекулярном режиме течения;
- анализ характеристик одной или группы конфигураций: проводимость, быстрота действия, распределение накопленных слоев сорбата или конденсата по поверхностям вакуумной системы, распределение концентрации по объему или по заданному сечению, построение индикатрис рассеяния в заданных сечениях, выделение конфигураций с максимальными и минимальными характеристиками.

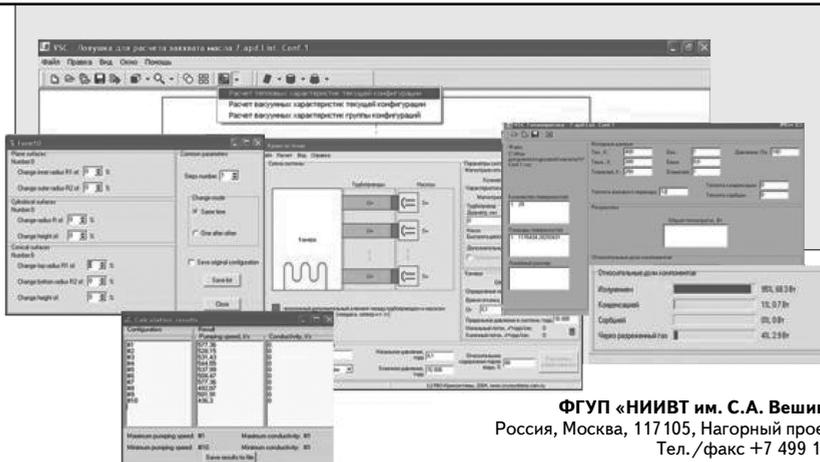
### Расчет вакуумных параметров системы в переходном режиме течения газа

#### Расчет тепловых параметров

- возможности расчета теплопритоков к различным элементам анализируемой конструкции;
- анализ одной или группы конфигураций; автоматизированный расчет характеристик, связанных со структурой анализируемой системы.

### Комплексный анализ группы конфигураций

- для уменьшения времени и облегчения процесса оптимизации сложных конструкций была разработана специальная надстройка. Ранее для расчета параметров системы при последовательном изменении какой-либо из ее частей приходилось вручную вводить каждую оригинальную конструкцию и последовательно производить расчет. В разработанной надстройке предусмотрена возможность автоматического задания изменяемой части конструкции, а также пределов ее изменения. Индивидуально для каждой группы или типа поверхности: автоматическое изменение параметров конфигурации (размеры и положение объектов) по заданным пользователем параметрам отклонения в процентах; автоматическое изменение характеристик поверхности (коэффициентов прилипания, лучеиспускания, температуры и т. д.) по заданным пользователем параметрам отклонения от исходных в процентах, последовательное или одновременное изменение параметров объектов и групп; возможность сохранения для анализа исходной конфигурации;
- для анализа и сравнения характеристик полученной группы конфигураций может использоваться любой расчетный модуль — в каждом из них предусмотрена возможность анализа группы конфигураций и вывод результатов наиболее наглядным для сравнения характеристик образом.



# Введение

Сегодня трудно назвать какую-либо область науки, техники или промышленного производства, в которой не применялась бы вакуумная техника.

В книге рассматриваются методы расчета сложных вакуумных систем. Под сложной вакуумной системой понимается система, состоящая хотя бы из двух простых элементов.

Авторы книги являются сотрудниками ФГУП «НИИВТ им. С.А. Векшинского» (г. Москва), КГТУ (г. Казань) и ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского (г. Жуковский).

В главе 1 приведены общие положения, относящиеся к вакуумной технике.

В главе 2 рассматриваются различные методы расчета.

Главы 3 и 4 посвящены использованию методов расчета для анализа сложных вакуумных систем и локальных характеристик отдельных элементов.

В главе 5 исследуется термомолекулярный эффект.

В главе 6 рассматриваются вопросы, связанные с разработкой и модернизацией вакуумных крионасосов.

Методам расчета откачных характеристик бесконтактных вакуумных насосов посвящена глава 7.

В главах 8, 9 и 10 рассматриваются вопросы определения проводимости щелевых каналов в вязкостном, молекулярном и молекулярно-вязкостном режимах течения газа.

Универсальный метод расчета проводимости каналов бесконтактных вакуумных насосов анализируется в главе 11.

Учету подвижности стенок каналов при расчетах обратных перетеканий в бесконтактных вакуумных насосах посвящена глава 12.

Применение метода прямого статистического моделирования для расчета вакуумных систем рассматривается в главе 13.

Введение написано С.Б. Нестеровым; главы 1, 4, 5, 6 — С.Б. Нестеровым, Ю.К. Васильевым; главы 2, 3 — С.Б. Нестеровым, Ю.К. Васильевым, А.В. Андросовым; главы 7, 10, 12 — А.В. Бурмистровым, С.И. Саликеевым; главы 8, 9, 11 — А.В. Бурмистровым, С.И. Саликеевым, М.Д. Бронштейном; глава 13 — А.И. Ерофеевым; глава 14 — С.Б. Нестеровым, А.В. Андросовым.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Бурное развитие и все более расширяющиеся области применения вакуумного оборудования, например для обеспечения технологических процессов в экспериментальных термоядерных установках, имитаторах космического пространства, ускорителях на встречных пучках, в микроэлектронике, физике твердого тела и т. д., обуславливают разнообразие и индивидуальность физических и эксплуатационных факторов, увеличивающую структурную усложненность, возрастающую ресурсоемкость действующих и в еще большей степени разрабатываемых вакуумных систем. Таким образом, процесс проектирования современных вакуумных систем является сложной и разветвленной задачей, подверженной влиянию многих факторов, характеризующих специфичность и многообразие параметров функционирования вакуумной системы. Поэтому решение подобной задачи требует зачастую индивидуального подхода, так как современные реальные вакуумные системы являются сложными ресурсоемкими комплексами как с технологической, так и с экономической точек зрения и проведение исчерпывающих экспериментальных исследований на этапе проектирования затруднено или невозможно.

В связи с этим особое значение приобретает проведение предварительного анализа системы на этапе проектирования. Целями подобного анализа могут быть: получение предварительных данных о характеристиках агрегата; моделирование рабочих режимов для выявления наиболее ответственных частей проекта; оптимизация агрегата по заданным параметрам; сравнение нескольких альтернативных конструкций и т. д. Вышеупомянутые причины обуславливают необходимость развития таких идей и методов проектировочных расчетов сложных вакуумных систем, которые, с одной стороны обладают максимально возможной степенью универсальности, то есть позволяют строить алгоритмы и продукты на их основе, не требующие доработки для анализа каждой конкретной системы, а с другой стороны, дают возможность учитывать ключевые факторы, оказывающие существенное влияние на условия функционирования реальной вакуумной системы:

- наличие множественных распределенных источников и стоков газа;
- сильную структурную усложненность;
- наличие сильных температурных перекосов;
- нестационарность протекающих процессов.

Современная ситуация с использованием различных методик и подходов складывается следующим образом. Применение традиционных подходов для анализа реальных сложных вакуумных систем малоэффективно, так как эти подходы базируются на осредненных параметрах состояния разреженного газа и заимствованы из механики сплошных сред. Использование адекватных методов расчета, напротив, ориентировано на построение трехмерных полей дифференциальных характеристик газовой среды (молекулярная кон-

центрация, плотности молекулярных потоков и т. п.). Давняя и широкая известность большинства подобных методов анализа сформировала устойчивый стереотип о простоте решения большинства задач, которые могут встать перед проектировщиком вакуумной системы и, соответственно, о нецелесообразности дальнейшего развития существующих подходов.

Однако при попытке использовать для анализа конкретной вакуумной системы имеющиеся описания методов проектировщик сталкивается с их разрозненностью, половинчатостью, а зачастую и незавершенностью, что наряду с наличием чисто практических трудностей в освоении разветвленных и довольно громоздких математических аппаратов этих методов обуславливает сложность их непосредственного использования. Кроме этого, увеличивающиеся требования к точности расчетов и к более адекватному описанию процессов, протекающих в вакуумных системах, обуславливают необходимость решения задач в нестационарной постановке, анализа систем со сложной, динамически изменяющейся геометрией, находящихся в существенно неравновесных условиях, учета влияния параметров взаимодействия молекул со стенками и т. п. Также особо актуальным представляется развитие подходов в направлении, позволяющем получать в результате анализа традиционные параметры вакуумных систем, такие как давление, концентрация и т. п., наиболее удобные и привычные для проектировщика в целях наиболее эффективного дальнейшего их использования в работе над проектом.

Наличие вышеозначенных вопросов, требующих решения, определяет актуальность обобщения имеющихся представлений и выработку на их основе и на базе необходимых модификаций единой, максимально универсальной методики для анализа вакуумных систем, ориентированной на решение современных задач, стоящих перед проектировщиком. Отдельной проблемой, также требующей решения, является приведение такой методики к виду, позволяющему создать универсальные программные продукты, которые позволят проводить комплексный анализ интегральных и дифференциальных характеристик любой вакуумной системы, причем не требуя участия проектировщика в реализации расчетных алгоритмов.

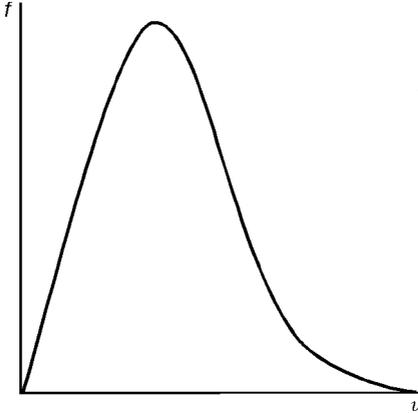
Главным объектом исследования при анализе вакуумных систем являются разреженный газ и параметры, характеризующие его состояние. Разреженный газ близок по своим свойствам к идеальному газу. Идеальными газами принято считать такие, у которых:

- молекулы можно представить как упругие материальные частицы (в силу этого часто вместо термина «молекула» используется «частица»);
- между частицами происходят только упругие взаимодействия, то есть отсутствуют силы межмолекулярного воздействия;
- объем, занимаемый частицами, пренебрежимо мал по сравнению со свободным объемом.

Одним их основных параметров, характеризующих совокупность молекул внутри объема, является молекулярная концентрация  $n$ . Концентрация показывает, сколько частиц (молекул) находится в единице объема системы —  $n$  [м<sup>-3</sup>].

Поведение каждой отдельной молекулы характеризуется ее тепловой скоростью. Максвелл показал, что газ, не подвергающийся какому-либо

постороннему механическому или температурному воздействию, всегда приходит в такое состояние, когда молекулы распределяются по скоростям теплового движения по вполне определенному статистическому закону. Распределение Максвелла по скоростям носит следующий характер.



**Рис. 1.1.** Графическое представление распределения Максвелла

Графическая иллюстрация распределения Максвелла показана на рис. 1.1 — качественная зависимость числа молекул, имеющих значение скорости  $v$  [м/с].

На основе этого закона можно подсчитать тепловые скорости молекул:

- наиболее вероятную

$$v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2R_0T}{M}} = 129\sqrt{\frac{T}{M}};$$

- среднеарифметическую

$$v_{\text{а}} = \sqrt{\frac{8R_0T}{\pi M}} = 145,51\sqrt{\frac{T}{M}};$$

- среднюю квадратичную

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3R_0T}{M}} = 158\sqrt{\frac{T}{M}}.$$

Как видно из зависимостей, параметрами, влияющими на значение тепловой скорости молекулы, являются температура  $T$  и молекулярная масса  $M$  ( $R_0 = 8,314$  Дж/(К · моль) — универсальная газовая постоянная).

Кроме закона распределения значения скорости в расчетах следует учитывать угловое распределение скоростей, то есть определенное соотношение значений компонент скорости. Одним из наиболее распространенных типов углового распределения является диффузный, или косинусный закон. При диффузном законе распределения число молекул  $dN_\theta$ , попавших в элементарный телесный угол  $d\omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta$ , пропорционально  $\cos(\theta)$ . В общем случае этот закон имеет вид

$$dN_\theta = Nd\omega \cos^b \theta. \quad (1.1)$$

При  $b = 1$  данное соотношение отражает косинусный закон распределения, при  $b = 0$  — равномерное распределение, а при других значениях  $b$  — лепестковый закон углового распределения молекул.

Плотность газа определяется соотношением  $\rho = nm$ , где  $n$  — концентрация молекул,  $m$  — масса молекулы [кг].

Соотношение для определения значения давления газа, имеющего заданную концентрацию и температуру,

$$p = nkT, \quad (1.2)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана, следует из закона Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} R_0 T.$$

Здесь следует указать, что для неравновесных систем понятие давления не отражает полного состояния газа, поскольку при наличии температурных полей становится непонятным, к какой именно температуре относится полученная характеристика. Однако в силу сложившихся традиций термин «давление» активно используется в расчетах. Поэтому удобно использовать понятие «приведенное давление», когда давление характеризует распределение концентрации при одной общей температуре. То есть если, например, внутри системы присутствуют температурные поля, то, рассчитав распределение концентрации молекул внутри нее, можно определить по соотношению (1.2) распределение приведенного к определенной общей (средней) температуре давления.

Хаотическое движение молекул сопровождается не только их соударениями со стенками, но и взаимными столкновениями. Таким образом, траектория молекулы представляет собой ломаную прямую линию, прямые участки которой характеризуют свободный от столкновений путь. Эти участки не могут быть одинаковы, но, поскольку существует определенный закон распределения, аналогично средней скорости молекул вводится понятие средней длины свободного пробега:

$$\bar{l} = \frac{kT}{p\pi\sigma^2\sqrt{2}}, \quad (1.3)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура;  $p$  — давление;  $\sigma$  — диаметр молекулы.

Среднюю длину свободного пробега молекулы используют для определения режима течения газа с помощью числа Кнудсена:

$$\text{Kn} = \frac{\bar{l}}{d}, \quad (1.4)$$

где  $d$  — характерный линейный размер вакуумной системы. В зависимости от значения числа Кнудсена различают несколько режимов течения газа:

- $\text{Kn} < 0,3$  — вязкостный: характер движения в основном определяется межмолекулярным взаимодействием, влияние стенок вакуумной системы незначительно, газ ведет себя как вязкая жидкость; для анализа с достаточной степенью точности применимы законы гидродинамики;

- $5 < \text{Kn}$  — свободномолекулярный: движение газа представляет собой независимое перемещение молекул, претерпевающих только соударения со стенками вакуумной системы;

- $0,3 < \text{Kn} < 5$  — переходный: движение газа характеризуется столкновениями обоих типов.

Поскольку основными характеристиками, определяемыми при анализе вакуумной системы являются параметры, характеризующие поведение газовых потоков, важное значение имеет величина числа молекул, ударяющихся о единичную поверхность в единицу времени  $\nu$  [ $1/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ]:

$$\nu = \frac{nv_a}{4}. \quad (1.5)$$

Соответственно «объем» молекул, ударяющихся о единичную поверхность в единицу времени  $V_0$  [ $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ] равен

$$V_0 = \frac{\nu}{n} = \frac{v_a}{4}. \quad (1.6)$$

При перетекании газа из одного бесконечно большого объема с давлением  $p_1$  [Па] в другой, с давлением  $p_2$  [Па], через малое отверстие или диафрагму с идеально тонкими стенками молекулярный поток определяется соотношением

$$Q_{\text{отв}} = V_0 F_{\text{отв}} = \frac{v_a F_{\text{отв}}}{4} (p_1 - p_2), \quad (1.7)$$

где  $F_{\text{отв}}$  — площадь отверстия [ $\text{м}^2$ ].

Из соотношения (1.7) вытекает зависимость для определения пропускной способности (проводимости) отверстия или диафрагмы с идеально тонкими стенками:

$$U_{\text{отв}} = \frac{v_a F_{\text{отв}}}{4}. \quad (1.8)$$

Одним из важнейших элементов системы понятий вакуумной техники, основанной на традиционном подходе к расчету и проектированию вакуумных систем, является быстрота действия насоса  $S_{\text{н}}$  [ $\text{м}^3/\text{с}$ ]. Быстрота действия насоса определяет объем газа, проходящий через входное сечение в направлении откачки за единицу времени.

Аналогичная характеристика, отнесенная к объекту откачки, — быстрота откачки  $S$ , [ $\text{м}^3/\text{с}$ ] в некотором сечении — газовый поток, протекающий в этом сечении, отнесенный к давлению в том же сечении:

$$S = \frac{Q}{p}. \quad (1.9)$$

Количественная связь между потоком газа, проходящим через сечение некоторого канала вакуумной системы, в котором существует давление  $p$ , и давлениями  $p_1$  и  $p_2$  во входном выходном его сечениях выражается зависимостью

$$Q = U(p_1 - p_2). \quad (1.10)$$

В терминах механики сплошных сред уравнение (1.10) выражает условие неразрывности газового потока. Из него следует основное уравнение вакуумной техники:

$$\frac{1}{S_{\text{н}}} = \frac{1}{U} + \frac{1}{S} \quad \text{или} \quad S_{\text{н}} = \frac{SU}{(U + S)}. \quad (1.11)$$

Представленные характеристики являются базисными параметрами традиционной системы понятий вакуумной техники и активно используются при анализе вакуумных систем. В рассматриваемой системе понятий все статические и динамические характеристики выражаются через осредненные параметры состояния разреженного газа, поэтому, строго говоря, применимы при условиях равновесности вакуумной системы.

Это ограничение снимается при развитии системы понятий до уровня, допускающего использование дифференциальных и интегральных характеристик, описывающих с использованием статистически детерминированных констант процессы локальных взаимодействий молекулы с элементами вакуумной системы. Наиболее часто используются следующие параметры:

- коэффициент прилипания — дифференциальная характеристика, определяющая вероятность длительного удержания поверхностью вакуумной системы упавшей на нее молекулы; нужно отметить, что схожий статистический смысл имеют другие коэффициенты, отражающие лишь отличную физику процесса взаимодействия, например коэффициент конденсации, коэффициент сорбции;

- коэффициент проводимости — интегральная характеристика, определяющая среднюю для совокупности молекул вероятность пролета от входного до выходного сечения некоей проводящей системы; при условиях диффузного отражения и состояния равновесия в системе коэффициент проводимости численно равен коэффициенту Клаузинга;

- коэффициент захвата — интегральная характеристика, определяющая среднюю для совокупности молекул вероятность быть поглощенными элементом вакуумной системы.

Принципиальной особенностью интегральных характеристик является универсальность даваемого ими описания элементов вакуумной системы. Кроме этого, безразмерность и относительность этих параметров дают возможность распространять их на анализ практически любых вакуумных систем безотносительно к режиму течения газа, степени сложности и равновесности вакуумной системы.

Также эти характеристики делают возможным построение на базе формулирования систем интегро-дифференциальных уравнений математических моделей элементов и вакуумных систем в целом, что позволяет осуществлять их структурно-параметрическую оптимизацию.

# ГЛАВА 2

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА

### 2.1. Обзор методов

Выбор методики для анализа вакуумной системы определяется, с одной стороны, факторами, характеризующими эту вакуумную систему и условия ее функционирования, а с другой стороны, условиями, накладываемыми на качество и достоверность результатов, которые планируется получить.

Существует несколько уровней описания процессов, протекающих в разреженном газе, и ряд соответствующих им методов и подходов, в рамках которых реализуется замкнутая система понятий, описывающих состояние разреженного газа и интегральные характеристики вакуумных систем.

Существующие методы и подходы можно условно разделить на две основные части: аналитические и численные. Под аналитическими методами подразумеваются так называемые традиционные подходы к анализу вакуумных систем, получившие развитие в первой половине прошлого века и базирующиеся на осредненных параметрах состояния разреженного газа и на связанной с этой предпосылкой системе допущений. Модели аналитических методов относительно просты и пригодны для непосредственного использования проектировщиком. Под численными методами понимаются подходы, требующие большого количества вычислений, причем возможность применения этих методов зачастую напрямую связана с количеством вычислительных ресурсов. Развитию численных методов дали импульс увеличение мощности и совершенствование вычислительной техники во второй половине прошлого века. Необходимо отметить, что численные методы зачастую являются комбинированными и активно используют известные аналитические соотношения для представления результата.

Далее рассмотрим основные имеющиеся подходы, которые наиболее широко применяются при анализе вакуумных систем с точки зрения целесообразности и эффективности использования этих подходов в реальных актуальных задачах проектирования и оптимизации.

#### 2.1.1. Классические аналитические методы

Одной из наиболее распространенных задач, встающих перед разработчиком вакуумных систем, является задача об определении проводимости (сопротивлении) трубопровода. Поиску корректных методов вычисления этих величин посвящена, пожалуй, большая часть публикаций по вакуумной технике. По-видимому, этот поиск дал решающий толчок серии классических исследований М. Кнудсена, М. Смолуховского и П. Клаузинга. Результаты этих и ряда других классических исследований широко известны, поэтому здесь остановимся лишь на основных этапах, наиболее выпукло

характеризующих процесс формирования и развития различных теорий и воззрений на пути анализа вакуумных систем.

Одной из простейших методик анализа вакуумных систем является теория сосредоточенных параметров, в рамках которой разреженный газ описывают термодинамически, принимая, что параметры состояния связаны между собой уравнением состояния идеального газа. Данная теория определяет такие базовые понятия вакуумной техники, как проводимость, сопротивление и быстрота действия. Согласно этой теории основная часть расчетов базируется на записи интегральных балансовых уравнений сохранения. В рамках этого подхода были выработаны основные соотношения для расчетов суммарных проводимости и сопротивления сложных составных вакуумных систем, а также основное уравнение вакуумной техники, устанавливающее связь между быстротой действия насоса  $S_H$ , присоединенного к откачиваемому объему через патрубок, имеющего проводимость  $U$  и эффективную быстроту откачки рассматриваемого объема  $S_{эфф}$ :

$$\frac{1}{S_{эфф}} = \frac{1}{S_H} + \frac{1}{U}.$$

Развитием данного подхода занимался С. Дэшман, выдвинувший гипотезу об аналогии процессов течения разреженного газа в каналах и тока в электрических цепях и предложивший известное соотношение для расчета суммарной проводимости составного трубопровода  $U_\Sigma$ :

$$\frac{1}{U_\Sigma} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{U_i}.$$

Данное соотношение, однако, не учитывает так называемый пучковый эффект, когда параметры газового потока на входе в каждую следующую часть формируются предыдущей частью и структура потока приобретает сильную продольную составляющую. В результате этого эффекта параметры потока на входе в каждую следующую часть существенно отличаются от условий диффузного напуска.

Определенную коррекцию в соотношение, предложенное С. Дэшманом, внес К. Оутли. Основным понятием его теории является вероятность прохождения молекулы газа через данный элемент  $U$ . При соединении двух трубопроводов одинакового радиуса и разной длины, имеющих вероятности прохождения  $U_1$  и  $U_2$  соответственно, результирующая вероятность прохождения всей системы в целом  $U_\Sigma$ , составленной из двух последовательно соединенных патрубков, определяется так:

$$\frac{1}{U_\Sigma} = \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} - 1.$$

В. Штекельмахер в известном обзоре отмечает, что подход К. Оутли по результативности аналогичен подходу С. Дэшмана.

Вышеупомянутые подходы рассматривают задачу определения проводимости канала в стационарной постановке. Процесс нестационарной откачки некоторого объема с учетом зависимости проводимости патрубка от

давления исследовал Г.А. Тягунов. Кроме этого, он впервые описал влияние изменения температуры газа на процесс откачки и внес фундаментальный вклад в развитие классических подходов в приложении к сложным трубопроводам.

Другую теорию течения разреженного газа через канал предложил М. Кнудсен. Среди основных предпосылок его теории можно назвать следующие: молекулярный поток на поверхность формируется и определяется параметрами газовой среды в рассматриваемом элементарном объеме; поведение газа описывается в терминах механики сплошных сред при рассмотрении процессов взаимодействия молекулы со стенками не учитываются температура стенки (изотермическая система), возможность поглощения или миграции молекулы по поверхности. В рамках разработанной теории М. Кнудсеном были получены приближенные соотношения для расчета проводимости протяженного канала круглого сечения, позднее подтвержденные М. Смолуховским, который на основе подхода М. Кнудсена при более строгом рассмотрении процесса течения разреженного газа получил соотношения для расчета проводимости протяженного канала произвольного сечения.

Благодаря простому математическому аппарату теория М. Кнудсена нашла широкое применение в качестве базиса для развития аналитических подходов для анализа молекулярных течений.

Следующим этапом развития теоретических основ расчета вакуумных систем стала теория П. Клаузинга. Главным новшеством теории П. Клаузинга стал полный отказ от попытки увязать плотность падающего потока молекул на фрагмент поверхности системы с локальными характеристиками газовой среды в прилегающем объеме. Следуя П. Клаузингу, поток молекул, вылетающих через выходное сечение канала  $U_{\text{тр}}$  можно выразить через поток молекул, влетающих в его входное отверстие  $U_{\text{отв}}$ . То есть

$$U_{\text{тр}} = kU_{\text{отв}}.$$

Данный подход развивал также и С. Дэшман, однако П. Клаузинг дал коэффициенту пропорциональности  $k$  ясное физическое истолкование и вычислил его для труб кругового и прямоугольного сечения. В рамках теории П. Клаузинга стал ясно виден ряд принципиальных моментов: значение потока через трубопровод зависит не от температуры его стенок, а только от температуры газа на входе в трубопровод; на значение потока через канал имеют влияние лишь геометрическая структура канала и параметры взаимодействия молекул со стенками — физическая модель рассеяния и характеристики поверхности с точки зрения возможности поглощения (захвата) молекул.

Как уже отмечалось, П. Клаузинг внес существенный вклад в чисто практическую область проведения вакуумных расчетов: обосновал диффузный (косинусный) закон отражения молекул от стенки, получил соотношения для расчета проводимости канала произвольной длины и разных типов поперечного сечения, одним из первых применил законы молекулярного течения газов к расчету оптической задачи, а при расчете молекулярных потоков использовал законы оптики, и т. д.

Методика П. Клаузинга получила широкое применение для расчетов проводимостей каналов, а заложенные в нее предпосылки позволяют рассматривать этот подход в качестве начального этапа развития единой универсальной методики для анализа сложных вакуумных систем. Подход П. Клаузинга для анализа вакуумных систем получил интенсивное развитие в работах Г.Л. Саксаганского [1], Ю.А. Рыжова, Ю.А. Кошмарова и др.

### 2.1.2. Развитие аналитических подходов в приложении к актуальным задачам вакуумной техники

Расширение областей применения вакуумной техники ощутимо увеличило спектр актуальных задач вакуумной техники, решение которых, с одной стороны, может быть найдено в рамках имеющихся классических подходов и воззрений, а с другой стороны, требует существенного развития и совершенствования методов их расчета. Наиболее простым и очевидным выходом из ситуации, когда классические подходы формулируют необходимые предпосылки, но не дают конкретных методик, применимых для анализа систем с усложняющейся геометрией или для решения новых возникающих задач, таких как анализ профилей замороженного слоя конденсата и т. п., является развитие аналитических методов расчета.

Развитие и совершенствование аналитических методик для анализа вакуумных систем в приложении к задачам, отличным от расчета проводимости трубопроводов, происходило параллельно с возникновением необходимости формирования подходов, пригодных для применения при проектировании вакуумных систем. Основными требованиями к подобным методам были простота и прозрачность математических моделей, которые не вынуждают проектировщика длительно осваивать метод, а позволяют непосредственно использовать его для решения поставленной задачи а при необходимости самостоятельно развивать и совершенствовать.

Одно из решений данной проблемы предложил Быков, разработавший простой и легко расширяемый и развиваемый аналитический метод, позволяющий проводить оценочные расчеты интегральных характеристик вакуумных систем, гораздо более сложных, чем трубопроводы.

Развитие аналитических методов анализа вакуумных систем шло не только в направлении углубления и усложнения постановки традиционных задач вакуумной техники, таких как определение интегральных характеристик вакуумных систем, но и в направлении расширения спектра решаемых задач. С развитием криовакуумной техники актуальными стали задачи изучения структуры замороживаемого слоя конденсата. А.М. Макаров сформулировал метод, позволяющий определять структуру замороженного слоя сконденсированного газа на криопанелях для различных типов источников напуска газа и геометрических характеристик системы. Полученные им соотношения позволяют быстро и без использования сложного математического аппарата получать информацию о структуре накопленного слоя.

Различные аналитические методы продолжают развиваться, поскольку сочетают в себе простоту применения и необходимую для оценочных расчетов точность.

### 2.1.3. Метод угловых коэффициентов

Одним из наиболее детально развитых подходов, получивших широкое распространение в расчетах вакуумных систем и выделившихся в отдельную методику, является метод угловых коэффициентов, или метод лучистой аналогии.

Как следует из названия, он строится на аналогии между закономерностями течения газа в системах с диффузно отражающими стенками и лучистого теплообмена в диатермических замкнутых средах. Данный метод строится на использовании базового понятия углового коэффициента, который выражает собой долю потока, диффузно эмитируемого с одного элементарного фрагмента поверхности (или со всей поверхности в целом) и падающего на другой элементарный фрагмент поверхности (или на другую поверхность в целом). Значения угловых коэффициентов зависят от взаимного расположения и типов поверхностей, составляющих анализируемую систему. После определения значений угловых коэффициентов с использованием параметров, характеризующих взаимодействие с поверхностью (коэффициенты поглощения или прилипания и отражения), находятся значения потоков с поверхности на поверхность, которые, в свою очередь, позволяют определять интегральные характеристики системы — проводимость, быструю действия и т. п.

В применении к расчетам молекулярных потоков в вакуумных системах метод угловых коэффициентов активно развивали и распространяли Г.Л. Саксаганский, А.Д. Савельев, Л.С. Гуревич, С.Р. Галимов. Кроме того, метод угловых коэффициентов также широко используется при решении задач лучистого теплообмена в вакуумных системах. Особую актуальность эти задачи приобрели в контексте криовакуумных систем. Развитием метода угловых коэффициентов для анализа теплообмена излучением в приложении к задачам криовакуумной техники занимался Ю.А. Суринов.

Метод угловых коэффициентов является относительно простым в применении аналитическим методом, позволяющим проводить анализ структурно сложной системы с достаточно высокой степенью достоверности. Математический аппарат этого метода разработан настолько детально, что позволяет говорить об алгебре угловых коэффициентов («поточной алгебре») как о самостоятельном разделе общей теории теплообмена излучением. Большое количество всевозможных таблиц, дающих соотношения для определения угловых коэффициентов для множества комбинаций различных типов поверхностей и широкие возможности для их расширения и дополнения, послужило причиной распространения этого подхода в качестве одного из основных аналитических методов расчета вакуумных систем, применяемых в проектно-конструкторской практике.

### 2.1.4. Метод эквивалентных поверхностей

Особняком от других методов и подходов к анализу вакуумных систем стоит метод эквивалентных поверхностей. Данный подход не является методом анализа в непосредственном понимании, он представляет собой методику, органично дополняющую практически любой метод анализа, описы-

ваемый в данной главе. Суть данной методики сводится к замене сложного фрагмента вакуумной системы некоторой эквивалентной поверхностью, характеристики которой эквивалентны характеристикам всего фрагмента в целом. Таким образом, с одной стороны, происходит существенное упрощение анализируемой структуры, а с другой стороны, драматической потери точности результата не происходит, так как эквивалентная поверхность определяется как газокINETическая копия сложного фрагмента. При этом подобная схема анализа допускает и, более того, предполагает дальнейшую детализацию расчетов.

Использование данного подхода в качестве универсального дополнения практически к любому методу анализа было предложено и активно развивалось Г.Л. Саксаганским и Б.Д. Ершовым [1].

### 2.1.5. Метод анализа газовых потоков путем решения кинетического уравнения Л. Больцмана

Одним из наиболее строгих и общих подходов к анализу течений разреженного газа в вакуумных системах является метод, состоящий в использовании кинетического уравнения Л. Больцмана. Данное уравнение было выведено Л. Больцманом в 1872 г. Оно устанавливает взаимосвязь между скоростями молекул до и после столкновения.

Использование кинетического уравнения Л. Больцмана для анализа процессов течения разреженного газа является настолько всеобъемлющим и универсальным подходом, что для него разработаны как аналитические, так и численные методики, позволяющие использовать богатый математический аппарат на разных уровнях детализации анализируемой системы. Среди главных достоинств этого метода следует отметить возможность его использования для анализа молекулярных потоков в любом режиме течения — свободномолекулярном, переходном, сплошном.

К методикам, допускающим аналитическое решение уравнения Л. Больцмана, следует отнести моментный метод, рассмотренный М.Н. Коганом, суть которого сводится к замене уравнения Л. Больцмана системой моментных уравнений. При этом уравнению Л. Больцмана соответствует система бесконечного числа моментных уравнений, поэтому степень достоверности решения прямо связана с количеством уравнений. Существенный вклад в развитие данного подхода анализа газовых потоков внес Д.А. Лабунцов, получивший аналитические решения задачи в линейной постановке для шести- и восьмимоментного приближения.

Большая часть подходов к решению кинетического уравнения Л. Больцмана опирается на использование численных методик. В этом направлении метод использования кинетического уравнения для анализа газовых потоков развивается особенно бурно. Среди наиболее широко известных следует отметить метод прямого статистического моделирования, суть которого сводится к представлению реальных физических процессов с молекулами газа вероятностными моделями и статистическим анализом множества моделируемых процессов, и метод прямого численного решения кинетического уравнения Л. Больцмана, использование которого наиболее физически обосновано. Большой вклад в развитие направления использования чис-

ленных методов для решения уравнения Л. Больцмана внесли Ф.Г. Черемисин и А.П. Крюков.

К сожалению, при современном уровне развития вычислительной техники широкое применение методов анализа вакуумных систем с использованием решения кинетического уравнения Л. Больцмана ограничивается лишь простыми моделями рассчитываемых структур. Однако непрекращающееся развитие вычислительной мощи компьютеров вкупе с постоянным совершенствованием численных алгоритмов позволяют говорить о данном подходе как об одном из самых перспективных и универсальных методов анализа вакуумных систем.

### 2.1.6. Метод Монте-Карло пробной частицы

Метод Монте-Карло (далее ММК), называемый также методом статистических испытаний, является численным методом решения математических и физических задач путем моделирования характерной случайной величины. ММК был предложен в 1949 г. американскими математиками Н. Метрополисом и С. Уламом и изначально нашел применение в рассмотрении проблемы ослабления нейтронного излучения при решении кинетических уравнений, расчете интегралов и т. д. Теоретическое обоснование и вопросы прикладного применения ММК рассматривались И.М. Соболев, С.М. Ермаковым и др.

Одним из вариантов метода Монте-Карло, который используют для вакуумных расчетов, является метод пробной частицы, состоящий в моделировании движения молекул и статистической оценке результатов этого моделирования. Так как движение отдельных молекул газа подчинено законам статистической физики и носит случайный характер, ММК, как отмечал Г.Л. Саксаганский, «...полностью адекватен физической природе молекулярного переноса». При помощи метода пробной частицы анализируются различные параметры молекулярных течений внутри системы с заданной геометрией и условиями взаимодействия с поверхностями заданной системы. Метод пробной частицы используется для анализа молекулярных потоков, для которых выполняется допущение о свободномолекулярном режиме течения. Так как молекулы не сталкиваются между собой, алгоритм расчета строится таким образом, что частицы запускаются в систему по очереди и следующая запускается после того, как закончила полет предыдущая. На самом деле происходит многократный запуск одной и той же частицы, но поскольку параметры запуска и полета моделируются случайно, то считается, что все анализируемые варианты принадлежат разным частицам. Важное значение в расчетах методом пробной частицы играет датчик случайных чисел. Он должен генерировать случайное число, равномерно распределенное в заданных пределах. Стандартные датчики, предоставляемые различными языками программирования, показывают удовлетворительные результаты и вполне годятся для использования. В описанных ниже расчетах используется датчик, генерирующий случайное число, равномерно распределенное на отрезке от 0 до 1. Учет и накопление параметров полета, необходимых для анализа, ведется индивидуально для каждой час-

тицы. После окончания запусков всех частиц проводятся анализ и статистическая оценка накопленных данных.

Первое непосредственное использование метода пробной частицы относится к 1958 г. Л. Левенсон, Н. Миллерон и Д. Дэвис [2] с использованием метода пробной частицы рассчитывали проводимости цилиндрической трубки, ловушки, колена и т. п.

В дальнейшем метод пробной частицы активно применялся для анализа интегральных характеристик различных вакуумных систем. Д. Дэвисом и В. Де Маркусом с использованием метода пробной частицы было исследовано влияние шероховатости стенок трубопровода на его проводимость. Причем шероховатость моделировалась регулярной структурой. Как показано в известном обзоре В. Штекельмахера, данное исследование показало совпадение рассчитанных значений проводимости с экспериментальными данными по шероховатым трубопроводам с отклонением в 5 %, и поэтому направление исследования влияния шероховатости было названо одной из многообещающих областей применения ММК.

В качестве одного из недостатков метода пробной частицы обычно отмечают невозможность получать непосредственные физические характеристики газовой среды, такие как давление, распределение плотности концентрации и т. п. Однако первые шаги в этом направлении делались уже давно. Так, в 1967 г. Е. Фишер и Х. Моммсен [3] для разработки стандартов испытательных камер для исследования параметров насосов осуществляли расчеты распределения давления в пристеночной области с помощью ММК. Подход, использованный ими, основывался на определении распределения давления через число соударений частиц со стенкой.

Существенный вклад в развитие метода пробной частицы внесли Г.Л. Саксаганский [1], Л.Н. Розанов, А.М. Кислов. Л.Н. Розанов использовал метод пробной частицы для расчетов проводимости сложных систем, таких как вакуумные ловушки, системы с произвольным числом входов. А.М. Кислов развивал применение ММК в области расчетов криогенных вакуумных систем. Кроме этого, он показал, как можно определять значение молекулярной концентрации внутри структурно сложной системы на основе анализа времени жизни молекулы в вакуумной системе.

К сожалению, развитие ММК тесно связано с развитием вычислительной техники и увеличением вычислительных ресурсов. Поэтому большая часть разработанных ранее алгоритмов имела вынужденные ограничения, связанные с уменьшением потребляемых вычислительных ресурсов, чтобы вычисления можно было проводить в обозримые сроки. В силу этого достоверность этих алгоритмов, естественно, снижалась. Кроме этого, степень достоверности ММК зависит от количества пробных частиц  $N$ , что вкуче с отмечаемой многими исследователями медленной сходимостью метода ( $\sim N^{0.5}$ ) и увеличивающимся объемом вычислений с увеличением сложности анализируемой системы затрудняло высокоточные вычисления.

Однако современный уровень вычислительной техники таков, что позволяет разрабатывать алгоритмы, лишенные ограничений, связанных с экономией вычислительных ресурсов, и развивать методы вычислений в направлении получения физических характеристик газовой среды. Замет-

ный вклад в этом направлении внес Ю. Сутсугу [4], который предложил метод вычисления пространственного распределения давления в сложной вакуумной системе. К сожалению, подходы как Е. Фишера и Х. Моммсена, так и Ю. Сутсугу оперируют с давлением, а данная категория, строго говоря, некорректна при анализе неравновесных систем. В данном контексте правильнее говорить о молекулярной концентрации.

В настоящий момент с развитием метода пробной частицы в приложении к решению актуальных задач вакуумной техники сложилась следующая ситуация. Основная часть публикаций относится к промежутку с начала 60-х и до конца 70-х гг. прошлого века. При этом с начала 1980-х гг. и практически по настоящий момент образовался некоторый пробел. По-видимому, эта ситуация объясняется тем, что работы, выполненные ранее, фактически полностью израсходовали тот вычислительный потенциал, который был доступен в конце 1970-х гг. То есть развитие метода пробной частицы в приложении к актуальным задачам как бы остановилось в силу объективных ограничений имеющихся вычислительных ресурсов.

Бурное развитие вычислительной техники в последнее десятилетие и качественно увеличившийся уровень имеющихся вычислительных ресурсов вкупе с существенно ужесточившимися требованиями к степени детализации описания и решения современных актуальных задач вакуумной техники обусловили начало нового этапа развития метода пробной частицы. Особую актуальность имеет развитие метода в направлении, позволяющем проводить анализ сколь угодно сложной системы и получать в результате традиционные параметры вакуумных систем, такие как давление, концентрация и т. п., наиболее удобные и привычные для проектировщика в целях наиболее эффективного дальнейшего их использования в работе над проектом.

Метод пробной частицы является одним из самых оптимальных, а в определенных ситуациях — единственным подходом, поскольку обладает относительно невысокой требовательностью к вычислительным ресурсам и при этом имеет потенциал для проведения с его помощью анализа вакуумных систем любой степени сложности, в том числе находящихся в неравновесных условиях с учетом нестационарности протекающих процессов и других факторов, определяющих параметры функционирования реальных вакуумных систем. Единственным ограничением применения метода пробной частицы в данном направлении является малая развитость соответствующих методик и подходов.

Современный уровень вычислительных ресурсов, практически никак не ограничивающий развитие метода пробной частицы, с одной стороны, и требуемая актуальными задачами вакуумной техники степень детализации их описания и решения, с другой, обуславливают необходимость дальнейшего развития данного метода для ответа на животрепещущие вопросы, которые стоят перед проектировщиками реальных вакуумных систем. Данная работа призвана обобщить, упорядочить и дополнить имеющиеся наработки в области применения метода пробной частицы для анализа сложных вакуумных систем и пролить свет на современные вопросы, встающие перед проектировщиком при решении актуальных задач вакуумной техники.

## 2.2. Метод угловых коэффициентов

### 2.2.1. Основные понятия

Проводимость вакуумных систем в целом и их элементов (клапанов, затворов, участков трубопроводов), коэффициенты захвата различных устройств (насосов, ловушек и др.), а также распределение молекул по поверхностям вакуумной системы или отдельных ее участков можно рассчитать с помощью угловых коэффициентов, используемых для определения теплообмена излучением.

В общем случае элементарную площадку площадью  $dF_i$  поверхности площадью  $F_i$  (далее поверхность  $F_i$ ) вакуумной системы покидает поток молекул, плотность которого

$$q_i = q_{0_i} + (1 - \alpha) q'_i, \quad (2.1)$$

где  $q_{0_i}$  — плотность потока молекул, испускаемых элементарной площадкой  $dF_i$  (например, в результате газовой выделенности поверхности);  $\alpha$  — коэффициент поглощения молекул газа площадкой  $dF_i$ ;  $q'_i$  — плотность потока молекул, падающих на площадку  $dF_i$ .

На элементарную площадку  $dF_i$  падает поток молекул со всех поверхностей вакуумной системы, видимых из центра площадки и образующих замкнутую систему. Полная плотность падающего потока

$$q'_i dF_i = \int_{\sum F_j} q_j d\varphi_{dF_j-dF_i} dF_j, \quad (2.2)$$

где  $q_j$  — плотность потока молекул, покидающих площадку  $dF_j$ ;  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  — вероятность попадания молекул газа с элементарной площадки  $dF_j$  поверхности  $F_j$  на площадку  $dF_i$  поверхности  $F_i$ .

Вероятность  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  зависит от закона отражения и испускания частиц поверхностью и взаимной ориентации площадок. Величина  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  называется дифференциальным или элементарным угловым коэффициентом, и в случае диффузного закона отражения

$$d\varphi_{dF_j-dF_i} = \frac{\cos \psi_j \cos \psi_i}{\pi r^2} dF_i, \quad (2.3)$$

где  $\psi_j$  — угол между нормалью к площадке  $dF_j$  и линией, соединяющей центры площадок  $dF_i$  и  $dF_j$ ;  $\psi_i$  — угол между нормалью к площадке  $dF_i$  и линией, соединяющей центры площадок  $dF_i$  и  $dF_j$ ;  $r$  — расстояние между центрами площадок  $dF_i$  и  $dF_j$ .

Вероятность  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  попадания молекул газа с элементарной площадки  $dF_j$  на всю поверхность площадью  $F_i$  называют локальным угловым коэффициентом:

$$d\varphi_{dF_j-dF_i} = \int_{F_i} d\varphi_{dF_j-dF_i} = \int_{F_i} \frac{\cos \psi_i \cos \psi_j}{\pi r^2} dF_i. \quad (2.4)$$

Вероятность  $\varphi_{F_j-F_i}$  попадания молекул газа с поверхности  $F_j$  на поверхность  $F_i$  при постоянстве  $q_j$  по всей поверхности  $F_j$  называют средним угловым коэффициентом:

$$\varphi_{F_j-F_i} = \frac{1}{F_j} \int_{F_j} dF_j \int_{F_i} \frac{\cos \psi_i \cos \psi_j}{\pi r^2} dF_i. \quad (2.5)$$

Угловые коэффициенты обладают свойствами:

- замкнутости

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{F_j-F_i} = 1;$$

- взаимности

$$\varphi_{F_j-F_i} F_j = \varphi_{F_i-F_j} F_i;$$

- аддитивности

$$\varphi_{F_j-F_i} = \sum_{k=1}^n \varphi_{F_j-F_{ik}}, \quad F_i = \sum_{k=1}^n F_{ik}.$$

Свойство аддитивности угловых коэффициентов заключается в том, что угловой коэффициент  $\varphi_{F_j-F_i}$  между поверхностями  $F_j$  и  $F_i$  равен сумме коэффициентов  $\varphi_{F_j-F_{ik}}$  между поверхностью  $F_j$  и всеми частями  $F_{ik}$  поверхности  $F_i$ , из которых она состоит.

### 2.2.2. Расчет угловых коэффициентов

Угловой коэффициент является основной расчетной величиной. Он может быть найден аналитическим, графоаналитическим методами, методом точной алгебры и численно при помощи ЭВМ. Первые три метода изложены в [1], [5]. Рассмотрим подробно аналитический метод определения угловых коэффициентов.

Аналитический метод основан на непосредственном интегрировании математического выражения для элементарного углового коэффициента. Рассмотрим в качестве примера систему, приведенную на рис. 2.1, если тела имеют диффузное отражение.

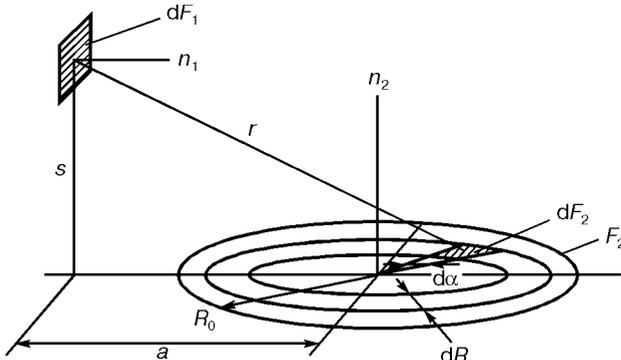


Рис. 2.1. Элемент плоскости и перпендикулярный ему круглый диск

Найдем значения величин, входящих в зависимость

$$d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2.$$

Величины, входящие в это выражение, определяются следующим образом:

$$r^2 = s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha; \quad \cos \psi_1 = \frac{a + R \cos \alpha}{r};$$

$$\cos \psi_2 = \frac{s}{r}; \quad dF_2 = R dR d\alpha.$$

Тогда

$$d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{\cos \psi_2 \cos \psi_1}{\pi r^2} dF_2 = \frac{s(a + R \cos \alpha) R dR d\alpha}{\pi (s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2};$$

$$d\varphi_{dF_1-dF_2} = \int_{F_2} d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{s}{\pi} \int_0^{R_0} R dR \int_0^\pi \frac{a + R \cos \alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2} d\alpha. \quad (2.6)$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^\pi \frac{a + R \cos \alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2} d\alpha = \frac{R}{4a^2 R^2} \int_0^\pi \frac{\frac{a}{R} + \cos \alpha}{\left(\frac{s^2 + a^2 + R^2}{2aR} + \cos \alpha\right)^2} d\alpha.$$

При

$$m_1 = \frac{a}{R}, \quad m_2 = \frac{s^2 + a^2 + R^2}{2aR}, \quad m_3 = \frac{1}{4a^2 R};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\alpha = 2 \frac{dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty.$$

Полученное выражение можно записать как

$$m_3 \int_0^\infty \frac{m_1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(m_2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2m_3 \int_0^\infty \frac{t^2(m_1-1) + (m_1-1)}{[t^2(m_2-1) + (m_2+1)]^2} dt = 2m_3 \frac{m_1-1}{(m_2-1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 + \frac{m_1+1}{m_1-1}}{\left(t^2 + \frac{m_2+1}{m_2-1}\right)^2} dt.$$

Пусть

$$n_1 = \frac{m_1 + 1}{m_1 - 1}; \quad n_2 = \frac{m_2 + 1}{m_2 - 1},$$

тогда будем иметь

$$2m_3 = \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 + n_1}{(t^2 + n_2)^2} dt = 2m_3 \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 + n_2 + n_1 - n_2}{(t^2 + n_2)^2} dt.$$

Далее обозначим первый интеграл последнего выражения через  $I_1$ , а второй — через  $I_2$ . Для вычисления интеграла  $I_2$  воспользуемся рекуррентной формулой

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

Получим

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + n_2)^2} = \frac{1}{2n_2} \frac{t}{(t^2 + n_2)^2} + \frac{1}{2n_2} I_1; \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{n_2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{n_2}} \right).$$

С учетом полученных соотношений продолжим вычисления:

$$\begin{aligned} 2m_3 &= \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2} [I_1 + (n_1 - n_2) I_2] = \\ &= 2m_3 \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2} \left[ I_1 + (n_1 - n_2) \left( \frac{1}{2n_2} \frac{t}{t^2 + n_2} + \frac{1}{2n_2} I_1 \right) \right] = \\ &= 2m_3 \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2} \left[ \frac{(n_1 - n_2)t}{2n_2(t^2 + n_2)} + \left( 1 + \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \right) \frac{1}{\sqrt{n_2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{\sqrt{n_2}} \right) \right] \Bigg|_0^\infty = \\ &= \pi m_3 \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2 \sqrt{n_2}} \left( \frac{n_1 + n_2}{2n_2} \right) = \pi m_3 \frac{m_1 - 1}{(m_2 - 1)^2 \sqrt{\frac{m_2 + 1}{m_2 - 1}}} \left( \frac{\frac{m_1 + 1}{m_1 - 1} + \frac{m_2 + 1}{m_2 - 1}}{\frac{2(m_2 + 1)}{m_2 - 1}} \right). \end{aligned}$$

После преобразования будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{a + R \cos \alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2} d\alpha = \\ &= \frac{\pi m_3}{2\sqrt{(m_2 - 1)(m_2 + 1)}} \left[ \frac{(m_1 + 1)(m_2 - 1) + (m_2 + 1)(m_1 - 1)}{(m_2 + 1)(m_2 - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Обозначив через  $V_1$  и  $V_2$  соответственные члены последнего выражения, проведем вычисления далее:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\pi m_3}{2\sqrt{(m_2-1)(m_2+1)}} = \frac{\frac{\pi}{4a^2R}}{2\sqrt{\left(\frac{s^2+a^2+R^2}{2aR}-1\right)\left(\frac{s^2+a^2+R^2}{2aR}+1\right)}} = \\
 &= \frac{\pi}{4a\sqrt{(s^2+a^2+R^2-2aR)(s^2+a^2+R^2+2aR)}} = \frac{\pi}{4a\sqrt{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}}; \\
 V_2 &= \frac{(m_1+1)(m_2-1)+(m_2+1)(m_1-1)}{(m_2+1)(m_2-1)} = \\
 &= \frac{\left(\frac{a}{R}+1\right)\left(\frac{s^2+a^2+R^2-2aR}{2aR}\right)\left(\frac{a}{R}-1\right)\left(\frac{s^2+a^2+R^2-2aR}{2aR}\right)}{\frac{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}{4a^2R^2}} = \\
 &= \frac{\left(\frac{a}{R}+1\right)\left(\frac{s^2+a^2+R^2-2aR}{2aR}\right)\left(\frac{a}{R}-1\right)\left(\frac{s^2+a^2+R^2-2aR}{2aR}\right)}{\frac{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}{4a^2R^2}} = \\
 &= 2a \frac{2a(s^2+a^2+R^2)-4aR^2}{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2} = 4a^2 \frac{(s^2+a^2+R^2)-2R^2}{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}.
 \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
 V_1V_2 &= \frac{\pi}{4a\sqrt{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}} 4a^2 \frac{(s^2+a^2+R^2)-2R^2}{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2} = \\
 &= \pi a \frac{(s^2+a^2+R^2)-2R^2}{\left[\sqrt{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}\right]^3}.
 \end{aligned}$$

Теперь вычислим второй интеграл:

$$\Phi_{dF_1-F_2} = \frac{s}{\pi} \int_0^{R_0} R \pi a \frac{(s^2+a^2+R^2)-2R^2}{\left[\sqrt{(s^2+a^2+R^2)^2-4a^2R^2}\right]^3} dR.$$

Подставив в это выражение

$$t = s^2 + a^2 + R^2; \quad dt = 2R dR;$$

$$dR = \frac{dt}{2R}; \quad R^2 = t - (s^2 + a^2); \quad dR = \frac{dt}{2R},$$

будем иметь

$$\frac{sa}{2} \int \frac{t - 2t + 2(s^2 + a^2)}{\left[\sqrt{t^2 + 4a^2t + 4a^2(s^2 + a^2)}\right]^3} = \frac{sa}{2} \int \frac{-t + 2(s^2 + a^2)}{\left[\sqrt{(t - 2a^2)^2 + 4a^2(s^2 + a^2) - 4a^4}\right]^3}.$$

При  $y = t - 2a^2$ ,  $dt = dy$ ,  $t = y + 2a^2$  получим

$$\frac{sa}{2} \int \frac{-y + 2s^2}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} dy = \frac{sa}{2} \left[ -\int \frac{y dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} + \int \frac{2s^2 dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} \right].$$

Обозначив интегралы последнего выражения соответственно через  $A_1$  и  $A_2$ , преобразуем их.

Первый интеграл при

$$z = y^2 + 4a^2s^2; \quad dz = 2y dy; \quad dy = \frac{dz}{2y},$$

второй при

$$y = 2as \operatorname{tg} z dz; \quad dy = \frac{2as}{\cos^2 z};$$

$$\sqrt{y^2 + 4a^2s^2} = \sqrt{4a^2s^2 \operatorname{tg}^2 z + 4a^2s^2}; \quad 2as\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1} = \frac{2as}{\cos z};$$

$$A_1 = -\int \frac{y dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(\sqrt{z})^3} = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}};$$

$$A_2 = 2s^2 \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} = 2s^2 \int \frac{2as \cos^3 z}{(\cos^2 z)(2as)^3} dz = \frac{1}{2a^2} \int \cos z dz =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \sin z = \frac{\operatorname{tg} z}{2a^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\frac{y}{2as}}{\frac{1 + y^2}{4a^2s^2}} \right) = \frac{y}{2a^2 \sqrt{y^2 + 4a^2s^2}}.$$

С учетом преобразований получим

$$\Phi_{dF_1 - F_2} = \frac{as}{2} (A_1 + A_2) \Big|_0^{R_0} = \frac{as}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}} + \frac{y}{2a^2 \sqrt{y^2 + 4a^2s^2}} \right) \Big|_0^{R_0} = \frac{s}{2} \left( \frac{2a^2 + y}{2a \sqrt{y^2 + 4a^2s^2}} \right) \Big|_0^{R_0}.$$

При  $y = t - 2a$  будем иметь

$$\frac{s}{4a} \left( \frac{t}{\sqrt{(t-2a)^2 + 4a^2 s^2}} \right) \Big|_0^{R_0} = \frac{s}{4a} \left\{ \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4a^2 [t - (s^2 + a^2)]}} \right\} \Big|_0^{R_0}.$$

Пусть  $t = s^2 + a^2 + R^2$ , тогда последнее соотношение будет иметь вид

$$\frac{s}{4a} \left( \frac{s^2 + a^2 + R^2}{\sqrt{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2}} \right) \Big|_0^{R_0} = \frac{s}{4a} \left[ \frac{s^2 + a^2 + R_0^2}{\sqrt{(s^2 + a^2 + R_0^2)^2 - 4a^2 R_0^2}} - 1 \right].$$

Так как при интегрировании по  $\alpha$  мы взяли интеграл на участке от 0 до  $\pi$ , а реально необходимо интегрировать от 0 до  $2\pi$ , то полученное выражение необходимо умножить на 2.

Следовательно,

$$\varphi_{dF_1-F_2} = \frac{s}{2a} \left[ \frac{s^2 + a^2 + R_0^2}{\sqrt{(s^2 + a^2 + R_0^2)^2 - 4a^2 R_0^2}} \right]. \quad (2.7)$$

Теперь рассмотрим пример расчета углового коэффициента для системы, состоящей из двух соосных круглых дисков (рис. 2.2).

Определим все величины, входящие в зависимость

$$\varphi_{F_1-F_2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \varphi_{dF_1-F_2} dF_1.$$

Первоначально вычислим

$$\varphi_{dF_1-F_2} = \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2.$$

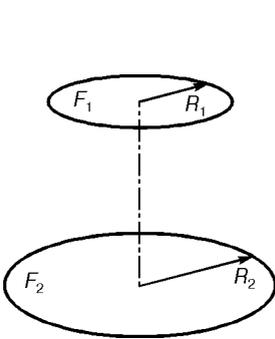


Рис. 2.2. Два параллельных соосных диска

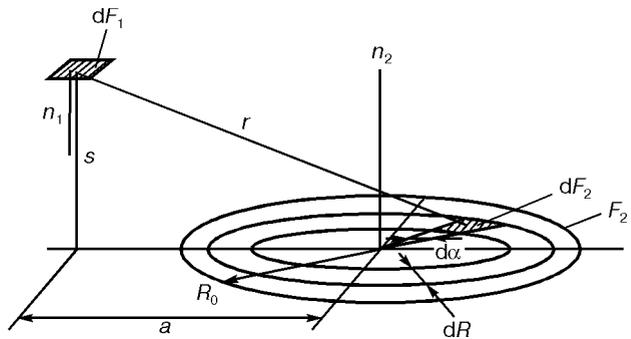


Рис. 2.3. Круглый диск и параллельный ему элемент плоскости

Для этого раскроем подынтегральное выражение. На рис. 2.3 изображена система, состоящая из круглого диска радиусом  $R_0$  и параллельного ей элемента плоскости  $dF_1$ .

Из рисунка видно, что

$$r^2 = s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha; \quad \cos \psi_1 = \cos \psi_2 = \frac{s}{r}; \quad dF_2 = R dR d\alpha.$$

Следовательно,

$$\Phi_{dF_1-F_2} = \frac{s^2}{\pi} \int_0^{R_0} R dR \int_0^\pi \frac{d\alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2}.$$

Этот интеграл вычисляется аналогично интегралу (2.6):

$$\Phi_{dF_1-F_2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{s^2 + a^2 + R_0^2}{\sqrt{(s^2 + R_0^2 + a^2)^2 - 4a^2 R_0^2}} \right]. \quad (2.8)$$

Далее вычислим  $\Phi_{F_1-F_2}$ , но при этом в (2.8) вместо  $a$  подставим  $R_1$ , а вместо  $R_0$  возьмем  $R_{20}$  и с учетом того, что  $dF_1 = R_1 dR_1 d\alpha$ ,  $F_1 = \pi R_{10}^2$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi_{F_1-F_2} &= \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \Phi_{dF_1-F_2} dF_1 = \frac{1}{\pi R_{10}^2} \int_0^{R_{10}} R_1 dR_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{s^2 + R_1^2 + R_{20}^2}{\sqrt{(s^2 + R_{20}^2 + R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2}} \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi R_{10}^2} \int_0^{R_{10}} R_1 \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{s^2 + R_1^2 + R_{20}^2}{\sqrt{(s^2 + R_{20}^2 + R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2}} \right] 2\pi dR_1 = \\ &= \frac{1}{R_{10}^2} \int_0^{R_{10}} R_1 \left[ 1 - \frac{s^2 + R_1^2 + R_{20}^2}{\sqrt{(s^2 + R_{20}^2 + R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2}} \right] dR_1. \end{aligned}$$

При

$$t = s^2 + R_1^2 + R_{20}^2; \quad dt = 2R_1 dR_1; \quad dR_1 = \frac{dt}{2R_1}; \quad R_1^2 = t - (s^2 + R_{20}^2)$$

последнее выражение будет иметь вид

$$\frac{1}{2R_{10}^2} \int \left[ 1 - \frac{t - 2R_{20}^2}{\sqrt{t^2 - 4R_{20}^2 t + 4R_{20}^2 (s^2 + R_{20}^2)}} \right] dt = \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ t - \int \frac{t - 2R_{20}^2}{\sqrt{(t - 2R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2}} dt \right].$$

Если обозначим

$$(t - 2R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2 = y; \quad dy = 2(t - 2R_{20}^2) dt; \quad dt = \frac{dy}{2(t - 2R_{20}^2)},$$

то далее получим

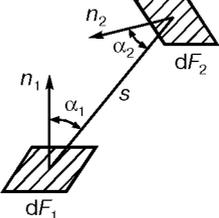
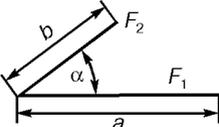
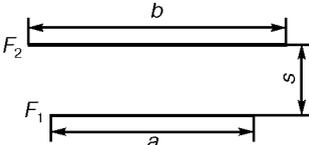
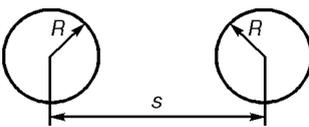
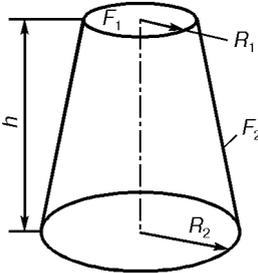
$$\begin{aligned} \frac{1}{2R_{10}^2} \left( t - \int \frac{dt}{2\sqrt{y}} \right) &= \frac{1}{2R_{10}^2} (t - \sqrt{y}) = \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ t - \sqrt{(t - 2R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_{20}^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 - R_{20}^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2} \right] \Big|_0^{R_{10}} = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ s^2 + R_{10}^2 + R_{20}^2 - \sqrt{(s^2 + R_{10}^2 + R_{20}^2)^2 - 4R_{10}^2 R_{20}^2} \right]. \end{aligned}$$

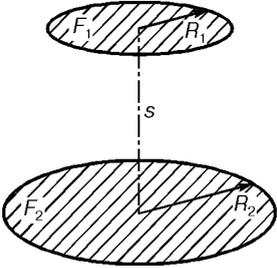
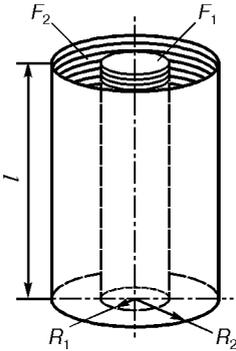
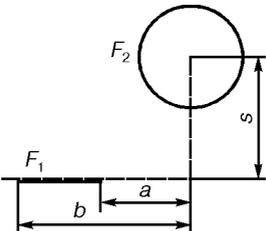
В итоге получим, что для двух соосных параллельных дисков радиусами  $R_1$  и  $R_2$  угловой коэффициент

$$\varphi_{F_1-F_2} = \frac{1}{2R_1^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_2^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} \right].$$

Далее в табл. 2.1 приведем формулы для определения угловых коэффициентов для наиболее часто встречающихся комбинаций поверхностей.

Таблица 2.1. Расчетные формулы угловых коэффициентов

Геометрическое положение плоскостей (фигура)	Комбинация поверхностей; расчетная формула
	<p>Два бесконечно малых произвольно ориентированных элемента;</p> $d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\pi s^2} dF_2$
	<p>Две бесконечные пластины, имеющие одну общую сторону;</p> $\varphi_{12} = \frac{1}{2a} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha})$
	<p>Две бесконечные пластины, параллельные друг другу;</p> $\varphi_{12} = \frac{1}{2a} \left[ \sqrt{4s^2 + (a+b)^2} - \sqrt{4s^2 + (a-b)^2} \right]$
	<p>Два бесконечно длинных параллельных цилиндра с одинаковым радиусом;</p> $\varphi_{12} = \frac{1}{\pi R} \left[ 2(s - 2R) \sqrt{s + 2R} + 2R \arcsin \frac{2R}{s} - s \right]$
	<p>Внутренняя поверхность и торцы усеченного конуса;</p> $\varphi_{21} = \frac{\sqrt{(h^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} - (h^2 + R_1^2 + R_2^2)}{2(R_1 + R_2) \sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}};$ $\varphi_{22} = 1 - \frac{\sqrt{(h^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} - h^2}{(R_1 + R_2) \sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}}$

Геометрическое положение плоскостей (фигура)	Комбинация поверхностей; расчетная формула
	<p>Два параллельных соосных диска;</p> $\varphi_{21} = \frac{1}{R_1^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_2^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} \right]$
	<p>Два соосных цилиндра;</p> $\varphi_{21} = \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1}{\pi R_2} \left\{ \arccos \frac{B}{A} - \frac{1}{2lR_1} \arccos \frac{R_1 B}{R_2 A} \times \right.$ $\left. \times \left[ \sqrt{(A + 2R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} + B \arcsin \frac{R_1}{R_2} - \frac{\pi A}{2} \right] \right\},$ <p>здесь <math>A = l^2 + R_2^2 - R_1^2</math>, <math>B = l^2 - R_2^2 + R_1^2</math>;</p> $\varphi_{22} = 1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{2R_1}{\pi R_2} \arctg \frac{2\sqrt{R_2^2 - R_1^2}}{l} - \frac{l}{2\pi R_2} \times$ $\times \left[ \frac{\sqrt{4R_2^2 + l^2}}{l} \arcsin \frac{4(R_2^2 + R_1^2) + \left(\frac{l^2}{4R_2^2}\right)(R_2^2 + 2R_1^2)}{l^2 + 4(R_2^2 + R_1^2)} - \right.$ $\left. - \arcsin \frac{R_2^2 - 2R_1^2}{R_2^2} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sqrt{4R_2^2 + l^2}}{l} - 1 \right) \right]$
	<p>Полоса и цилиндр бесконечной длины;</p> $\varphi_{12} = \frac{R}{b-a} \left( \arctg \frac{b}{s} - \arctg \frac{a}{s} \right)$

### 2.2.3. Примеры решения задач методом угловых коэффициентов

#### Пример 1

Расчет коэффициента Клаузинга  
для цилиндрического трубопровода

Обозначим входное сечение трубопровода цифрой 1, выходное сечение — 2 и боковую поверхность — 3. В сечение 1 входит поток газа  $Q_{д1}$ , десорбция газа с боковой поверхности отсутствует (рис. 2.4). Боковая поверхность трубопровода имеет коэффициент отражения  $\rho_3 = 1$ , а поверхности 1 и 2, так как представляют собой сквозные отверстия, имеют коэффициенты отражения  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ . Для нахождения коэффициента Клаузинга необходимо определить, какая доля потока  $Q_{д1}$  дойдет до выходного сечения 2. Запишем уравнение (2.1) для каждой поверхности:

$$\begin{cases} Q_{\rho 1} = Q_{д1} + \rho_1 (\varphi_{11} Q_{\rho 1} + \varphi_{21} Q_{\rho 2} + \varphi_{31} Q_{\rho 3}); \\ Q_{\rho 2} = Q_{д2} + \rho_2 (\varphi_{12} Q_{\rho 1} + \varphi_{22} Q_{\rho 2} + \varphi_{32} Q_{\rho 3}); \\ Q_{\rho 3} = Q_{д3} + \rho_3 (\varphi_{13} Q_{\rho 1} + \varphi_{23} Q_{\rho 2} + \varphi_{33} Q_{\rho 3}). \end{cases}$$

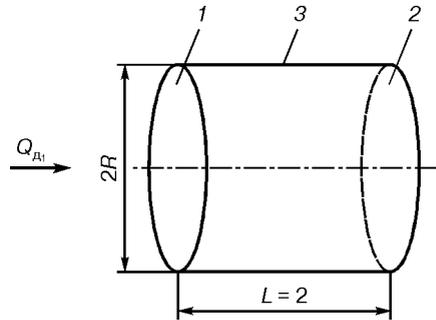


Рис. 2.4. Цилиндрический трубопровод

Таким образом, нам необходимо решить данную систему относительно  $Q_{\rho 1}$ ,  $Q_{\rho 2}$ ,  $Q_{\rho 3}$ .

Определим угловые коэффициенты, входящие в эту систему. По формуле (2.9) рассчитаем  $\varphi_{12}$  при  $R_1 = R_2 = R$ ,  $S = 2R$   $\varphi_{12} = 0,172$ . Для любой плоской поверхности  $\varphi_{ii} = 0$ , следовательно,  $\varphi_{11} = 0$ . Из свойства замкнутости ( $\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} = 1$ ) получим, что  $\varphi_{13} = 0,828$ .  $\varphi_{21} = \varphi_{12} = 0,172$ ;  $\varphi_{22} = \varphi_{11} = 0$ ;  $\varphi_{23} = \varphi_{32} = 0,828$ .

Из свойства взаимности ( $\varphi_{31} F_1 = \varphi_{13} F_3$ ) получим

$$\varphi_{31} = \varphi_{13} = \frac{F_1}{F_3};$$

так как  $F_1 = \pi R^2$ ,  $F_3 = 4\pi R^2$ , то  $\varphi_{31} = \varphi_{32} = 0,207$ . Из свойства замкнутости определим, что  $\varphi_{33} = 1 - \varphi_{31} - \varphi_{32} = 0,586$ .

Так как на поверхности 3 отсутствует десорбция молекул, а в сечение 2 не входит внешний поток, то  $Q_{д2} = 0$ ,  $Q_{д3} = 0$ . Получим, что  $Q_{\rho 1} = Q_{д1}$ ,  $Q_{\rho 2} = 0$ ,  $Q_{\rho 3} = \varphi_{13} Q_{\rho 1} + \varphi_{33} Q_{\rho 3}$  или

$$Q_{\rho 3} = \frac{\varphi_{13} Q_{д1}}{1 - \varphi_{33}}.$$

Поток, падающий на  $i$ -ю поверхность,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n Q_{\rho_j} \varphi_{ij},$$

следовательно,

$$Q_2 = Q_{\rho_1} \varphi_{12} + Q_{\rho_2} \varphi_{22} + Q_{\rho_3} \varphi_{32} = Q_{\rho_1} \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13} Q_{\rho_1}}{1 - \varphi_{33}} \varphi_{32} = \left( \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13} \varphi_{32}}{1 - \varphi_{33}} \right) Q_{\rho_1}.$$

Определим коэффициент Клаузинга для трубопровода:

$$k_{\text{кл}} = \frac{Q_2}{Q_1} = \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13} \varphi_{32}}{1 - \varphi_{33}} = 0,586.$$

Решив данную задачу при  $L \rightarrow \infty$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{12} \approx 0; \quad \varphi_{13} \approx 1; \quad \varphi_{21} \approx 0; \quad \varphi_{22} \approx 0; \quad \varphi_{23} \approx 1; \\ \varphi_{31} \approx 0; \quad \varphi_{32} \approx 0; \quad \varphi_{33} \approx 1; \quad k_{\text{кл}} \rightarrow 0,5. \end{aligned}$$

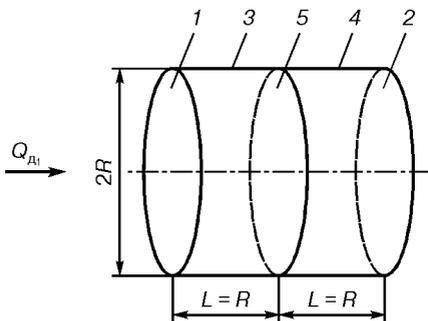
Этот результат является неверным, так как при  $L \rightarrow \infty$  коэффициент Клаузинга трубопровода стремится к нулю:  $k_{\text{кл}} \rightarrow 0$ . Поэтому применение метода угловых коэффициентов в таком виде при  $L/R > 4$  дает большую погрешность. Если  $L/R > 4$ , то коэффициент Клаузинга, рассчитанный методом угловых коэффициентов, отличается от действительного примерно на 40%. Для получения более точного результата применяют метод угловых коэффициентов с разбиением.

**Пример 2**

Расчет коэффициента Клаузинга для цилиндрического трубопровода методом угловых коэффициентов с разбиением

Решим предыдущую задачу методом угловых коэффициентов с разбиением (рис. 2.5). Разделим трубопровод на две равных части — левую (поверхности 1, 3, 5) и правую (поверхности 5, 4, 2).

Определим, какая часть потока  $Q_{\rho_1}$ , вошедшего в сечение 1, дойдет до сечения 5, т. е. решим задачу без учета правой половины трубопровода. Аналогично предыдущей задаче запишем систему уравнений и определим угловые коэффициенты ( $\rho_1 = 0, \rho_3 = 1, \rho_5 = 0$ ) (так как из правой половины трубопровода часть потока будет возвращаться обратно, то  $Q_{\rho_5}$  не будет равняться нулю, обозначим этот поток как  $Q_{\rho_5}^j$ ):



$$\begin{cases} Q_{\rho_1} = Q_{\rho_1} + \rho_1 (\varphi_{11} Q_{\rho_1} + \varphi_{31} Q_{\rho_3} + \varphi_{51} Q_{\rho_5}^j); \\ Q_{\rho_3} = Q_{\rho_3} + \rho_3 (\varphi_{13} Q_{\rho_1} + \varphi_{33} Q_{\rho_3} + \varphi_{53} Q_{\rho_5}^j); \\ Q_{\rho_5} = Q_{\rho_5}^j + \rho_5 (\varphi_{15} Q_{\rho_1} + \varphi_{35} Q_{\rho_3} + \varphi_{55} Q_{\rho_5}^j); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{13} = 0,618; \quad \varphi_{15} = 0,382; \\ \varphi_{31} = 0,309; \quad \varphi_{33} = 0,382; \quad \varphi_{35} = 0,309; \\ \varphi_{51} = 0,382; \quad \varphi_{53} = 0,618; \quad \varphi_{55} = 0. \end{aligned}$$

Рис. 2.5. Трубопровод