



М И Р

цифровой обработки

С.В. УМНЯШКИН

Теоретические
основы цифровой
обработки
и представления
сигналов

Второе издание,
исправленное и дополненное

ТЕХНОСФЕРА

Москва

2012

УДК 519.6:621.391

ББК 32.811

У54

У54 Умняшкин С.В.

**Теоретические основы цифровой обработки
и представления сигналов: Учебное пособие.**

Второе издание, исправленное и дополненное

Москва: Техносфера, 2012 – 368с. ISBN 978-5-94836-318-9

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Прикладная математика», включает в себя рассмотрение общих теоретических вопросов, связанных с цифровым представлением сигналов, основами анализа линейных дискретных систем. Значительное внимание уделено вопросам эффективного представления информации (сжатия данных) и использования вейвлет-преобразований. Может быть рекомендовано в качестве дополнительного материала для направлений подготовки радиотехнического и телекоммуникационного профиля.

Второе издание представляет собой существенно переработанный и расширенный материал, в который включены новые разделы, добавлены упражнения для самостоятельного выполнения.

УДК 519.6:621.391

ББК 32.811

© 2012, Умняшкин С.В.

© 2012, ЗАО «РИЦ «Техносфера», оригинал-макет, оформление

ISBN 978-5-94836-318-9

Содержание

Предисловие	6
Глава 1. Элементы функционального анализа и спектрального представления функций	9
1.1. Линейные нормированные пространства.....	9
1.2. Анализ в линейных нормированных пространствах.....	12
1.3. Банаховы пространства.....	15
1.4. Пространства со скалярным произведением.....	17
1.5. Аппроксимация в гильбертовом пространстве.....	20
1.6. Примеры ортогональных систем в пространстве L_2	26
1.7. Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье.....	33
1.8. Принцип неопределенности время-частотного представления сигналов.....	40
1.9. Обобщенное преобразование Фурье.....	47
1.10. Энергетический спектр. Спектр мощности.....	51
Глава 2. Дискретизация и квантование сигналов.	
Дискретные ортогональные преобразования	56
2.1. Преобразование непрерывных сигналов в дискретные.....	56
2.2. Дискретизация по критерию наибольшего отклонения.....	58
2.3. Частотный критерий выбора шага дискретизации.....	59
2.4. Спектр дискретного сигнала.....	65
2.5. Дискретное преобразование Фурье.....	70
2.6. Быстрое преобразование Фурье (БПФ). Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.....	79
2.7. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.....	92
2.8. Дискретное преобразование Уолша.....	97
2.9. Дискретное преобразование Хаара.....	103
2.10. Некоторые применения дискретных ортогональных преобразований.....	108
2.11. Квантование дискретных сигналов.....	111
Глава 3. Линейные дискретные системы	121
3.1. Z -преобразование.....	121
3.2. Линейные дискретные фильтры (ЛДФ).....	127
3.3. Соединения и структурные схемы фильтров.....	132

3.4. Устойчивость ЛДФ.....	139
3.5. Частотная характеристика ЛДФ.....	141
3.6. Синтез КИХ-фильтров по частотной характеристике.....	146
3.7. Нахождение отклика фильтра с использованием БПФ.....	152
3.8. Согласованный дискретный фильтр.....	155
3.9. Преобразователь Гильберта.....	162
Глава 4. Основы прикладной теории информации.....	169
4.1. Дискретный источник сообщений без памяти, количество информации. Энтропия.....	169
4.2. Основные теоремы о кодировании источника без памяти.....	176
4.3. Эффективное кодирование дискретного источника без памяти по методам Шэннона — Фано и Хаффмана.....	187
4.4. Кодирование длин серий.....	194
4.5. Арифметическое кодирование.....	197
4.6. Условная энтропия.....	207
4.7. Кодирование дискретного источника с памятью.....	212
4.8. Статистическое моделирование источника.....	220
4.9. Неопределенность непрерывного источника сообщений. Дифференциальная энтропия.....	221
4.10. Словарные методы кодирования.....	226
Глава 5. Теоретические основы применения ортогональных преобразований для представления дискретных сигналов.....	233
5.1. Корреляция как мера статистической зависимости данных. Преобразование Карунена — Лозва.....	233
5.2. Эффективность использования дискретных ортогональных преобразований для кодирования коррелированных данных.....	240
5.3. ДПФ в вещественной форме. Дискретное преобразование Хартли.....	247
5.4. Дискретный марковский процесс первого порядка. Дискретное косинусное преобразование (ДКП).....	250
5.5. Компрессия изображений на основе двумерного ДКП.....	257
5.6. Оптимизация алгоритмов сжатия данных с потерями.....	265
5.7. Аппроксимационный подход к выбору преобразований для кодирования дискретных сигналов. Частотная трактовка.....	272
5.8. Время-частотный анализ. Оконное преобразование Фурье.....	277

Глава 6. Вейвлет-преобразования и их приложения	
для обработки дискретных сигналов	285
6.1. Кратно-масштабный анализ (КМА).....	285
6.2. Проектирование функций на подпространства КМА.....	292
6.3. Вычисление дискретных вейвлет-преобразований.....	299
6.4. Квадратурно-зеркальные фильтры (КЗФ).....	303
6.5. Свойства КЗФ.....	309
6.6. Построение масштабирующих функций и вейвлетов по масштабирующим уравнениям.....	317
6.7. Вейвлеты Добеши.....	322
6.8. Биортогональные вейвлет-преобразования.....	328
6.9. Применение дискретных вейвлет-преобразований для сжатия сигналов.....	332
6.10. Подавление шумов фильтрацией в базисе дискретных вейвлет-преобразований.....	337
6.11. Двумерные дискретные вейвлет-преобразования.....	340
6.12. Вейвлет-пакеты.....	349
Заключение	360
Литература	361

Предисловие

В последние годы методы цифровой обработки сигналов (ЦОС) в радиотехнике, радиоэлектронике, системах связи, контроля и управления активно вытесняют методы аналоговой обработки сигналов. Этому способствует стремительно увеличивающаяся производительность вычислительной техники, которая проникает во все области человеческой деятельности. Важность изучения методов ЦОС трудно переоценить. На сегодняшний день вопросы, связанные с цифровой обработкой сигналов и кодированием информации, перестали быть узкоспециальными. Основы знаний в данной области требуются большинству инженеров, а для специалистов в области электронной техники и информационных технологий необходимо более глубокое понимание основных методов ЦОС и математической теории, лежащей в их основе. Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие направлено на изучение этих вопросов.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов, обучающихся по инженерным направлениям «Прикладная математика» и «Информатика и вычислительная техника». Однако при написании пособия автор старался опираться лишь на общий курс высшей математики, читаемый для всех инженерных специальностей, поэтому оно может быть рекомендовано также для студентов, обучающихся по профилям радиотехнического и телекоммуникационного направлений.

Первое издание пособия было выпущено в 2008 году издательством «Форум» и было допущено учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника».

Второе издание представляет собой существенно переработанный и расширенный материал, в который внесены исправления,



включены новые разделы, добавлены упражнения для самостоятельного выполнения.

Первая глава содержит необходимые предварительные сведения из функционального анализа и теории спектрального представления функций. В качестве напоминания приведены краткие сведения об интеграле Фурье и его свойствах, на которые в дальнейшем будут производиться многочисленные ссылки. Кроме того, в первой главе вводятся популярные в ЦОС функциональные системы Уолша и Хаара; рассматриваются обобщение интегрального преобразования Фурье и важный для спектрального анализа принцип неопределенности время-частотного представления сигналов.

Вторая глава посвящена вопросам дискретизации непрерывных сигналов и преобразований, прежде всего, преобразования Фурье. Значительное внимание уделено частотным вопросам дискретизации и построению алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Рассмотрены также дискретные преобразования Уолша и Хаара, приведены их быстрые алгоритмы вычислений. Отдельный раздел посвящен квантованию сигналов.

В третьей главе вводятся основные понятия теории линейных дискретных систем (фильтров). Основное внимание уделено анализу фильтров. Также рассматриваются некоторые практические вопросы синтеза фильтров с конечной импульсной характеристикой, согласованной фильтрации, реализации преобразования Гильберта.

Четвертая глава представляет собой введение в теорию информации и помимо теоретических сведений содержит также описание методов эффективного кодирования, которые используются в современных алгоритмах сжатия данных.

В пятой и шестой главах представлено более углубленное изложение специализированных разделов ЦОС, связанных с эффективным представлением сигналов. Фактически, здесь изучается тот теоретический базис, который составляет основу большинства современных цифровых методов сжатия аудио- и видеосигналов. В частности, шестая глава целиком посвящена дискретным вейвлет-преобразованиям. По сравнению с первым изданием, ма-

териал пятой и шестой глав был подвергнут наиболее существенной переработке.

В книге используется двойная нумерация для рисунков, формул, примеров и теорем: первая цифра обозначает главу, вторая — порядковый номер формулы (примера, теоремы) в главе. При нумерации (обозначении) аксиом и свойств используется значок «°», например 1°. Начало и окончание доказательств теорем, решений примеров обозначается соответственно символами ◀ и ▶.

Основу данного учебного пособия составляет курс лекций, читаемый автором на протяжении ряда лет в Национальном исследовательском университете «МИЭТ». Большое значение в работе над вторым изданием книги имело обсуждение содержания рукописи с коллегами — сотрудниками МИЭТ. Автор выражает глубокую признательность доценту В. В. Лесину за внимательное прочтение рукописи и ряд ценных методических рекомендаций, а также благодарит доцента В. Н. Земскова за полезные замечания, которые были учтены при подготовке учебного пособия в печать.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Функциональный анализ — раздел математики, который представляет собой абстрактное обобщение линейной алгебры и математического анализа. Рассмотрим некоторые понятия и методы функционального анализа, которые наиболее важны для теории обработки сигналов.

I.1. Линейные нормированные пространства

Определение. Множество E элементов произвольной природы называется *линейным пространством*, если в нем однозначно определены операции сложения элементов $x+y$ и умножения элементов на скаляр λ (вещественное или комплексное число) λx , результатом которых является элемент из того же множества E , причем выполняются следующие аксиомы.

1°. $\forall x, y \in E: x+y = y+x$.

2°. $\forall x, y, z \in E: (x+y)+z = x+(y+z)$.

3°. $\exists \theta \in E, \forall x \in E: \theta+x = x$ (существование нулевого элемента θ).

4°. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu (\lambda, \mu \text{ — скаляры}): \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

5°. Умножение на скаляры $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$: $0x = \theta, 1x = x$.

6°. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu: (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

7°. $\forall x, y \in E, \forall \lambda: \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

Назовем *противоположным* элементом для $x \in E$ такой элемент $y \in E$, что $x + y = \theta$. Из аксиом 5° и 6° следует, что $y = (-1)x$ (элемент x , умноженный на число -1). Обозначим противоположный элемент $-x$.

В курсе линейной алгебры изучались линейные пространства \mathbb{R}^n арифметических векторов размерности n . Приведенное выше аксиоматическое определение обобщает понятие линейного пространства \mathbb{R}^n на множества произвольной природы. По аналогии, элементы любого линейного пространства также будем называть *векторами*, а сами линейные пространства — *векторными пространствами*. В том же обычном смысле будем понимать термины «базис пространства», «линейная зависимость» (независимость) векторов и «размерность пространства». Напомним, что число n называется размерностью векторного пространства E (обозначается $n = \dim E$), если в E найдется n линейно независимых ненулевых элементов, а любые $(n + 1)$ ненулевых элементов пространства E являются линейно зависимыми. Линейное пространство может иметь бесконечную размерность.

Пример 1.1. Пусть $C[a;b]$ — множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$. Является ли это множество линейным пространством и если да, то какова его размерность?

◀ Выполнение аксиом 1°–7° очевидно, нулевым элементом θ является функция $f(x) = 0$, $\forall x \in [a;b]$. Покажем, что $C[a;b]$ — бесконечномерное пространство. Выберем из множества $C[a;b]$ n ненулевых элементов — функций $y_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. При любом числе n эти элементы являются линейно независимыми, так как равенство нулю многочлена $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{i-1} = 0$ для всех точек отрезка $x \in [a, b]$ возможно лишь в случае $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку число n можно выбрать как угодно большим, то $\dim(C[a;b]) = \infty$. ▶

Лемма 1.1. (Неравенство Минковского для интегралов.) Пусть для $p \geq 1$ существуют интегралы $\int_a^b |u(x)|^p dx$, $\int_a^b |v(x)|^p dx$ (пределы интегрирования — не обязательно конечные). Тогда существует также интеграл $\int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx$, причем верна оценка:

$$\left(\int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |v(x)|^p dx\right)^{1/p}. \quad (1.1)$$

Опустим доказательство леммы, которое носит технический характер¹.

Определение. Линейное пространство E называется *нормированным*, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой*, для которой выполняются следующие аксиомы.

- 1°. Невырожденность нормы. $\forall x \in E: \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
- 2°. Однородность нормы. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- 3°. Неравенство треугольника. $\forall x, y \in E: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В одном и том же векторном пространстве E норму можно вводить различными способами.

Пример 1.2. Рассмотрим векторное пространство $C[a; b]$ из примера 1.1. Покажите самостоятельно, что приводимые ниже способы вычисления нормы удовлетворяют аксиомам 1°—3°:

$$\text{а) } \|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad \text{б) } \|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, \text{ где } p \geq 1.$$

Указание. В пункте б) для доказательства аксиомы треугольника воспользуйтесь неравенством Минковского (1.1).

Определение. *Расстоянием* между элементами x, y нормированного векторного пространства E назовем число $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

На основании аксиом нормы легко показать, что введенное расстояние между элементами обладает следующими свойствами.

- 1°. $\forall x, y \in E: \rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- 2°. $\forall x, y \in E: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 3°. $\forall x, y, z \in E: \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

¹ Доказательство см., например: Ефимов А. В., Золотарев Ю. Г., Терпигорева В. М. Математический анализ (специальные разделы). — М.: Высшая школа, 1980. Ч.1 и 2. — 279 и 295 с.

◀ Первое и второе свойства очевидны. Для неравенства треугольника имеем:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \blacktriangleright$$

Расстояние между элементами называют *метрикой* пространства. Пространство (не обязательно нормированное), каждой паре x, y элементов которого поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x, y)$ (расстояние), обладающее свойствами 1°–3°, называется *метрическим*¹.

Определения. В метрическом пространстве E *открытым шаром* радиуса $r > 0$ с центром $x_0 \in E$ назовем множество $S_r(x_0) = \{x \in E \mid \rho(x, x_0) < r\}$, *замкнутым шаром* — множество $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in E \mid \rho(x, x_0) \leq r\}$. *Окрестностью* точки $x_0 \in E$ будем называть открытый шар произвольного радиуса ε , т. е. множество $S_\varepsilon(x_0)$.

Понятия нормы, расстояния, окрестности являются исходными для построения анализа в линейных нормированных пространствах.

1.2. Анализ в линейных нормированных пространствах

Определение. В линейном нормированном пространстве (ЛНП) E элемент $u \in E$ называется *пределом последовательности* $\{x_k\} \subset E$, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u, x_k) = 0$. При этом говорят, что последовательность $\{x_k\}$ *сходится* к элементу u и используют обозначение $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = u$.

Определение. Элемент a из ЛНП E называется *предельной точкой* множества $M \subset E$, если в любой окрестности a содержится хотя бы один элемент $x \in M, x \neq a$. То есть $\forall r > 0: (S_r(a) \setminus a) \cap M \neq \emptyset$.

¹ Несмотря на то что метрическое пространство может и не быть нормированным, мы будем рассматривать только нормированные метрические пространства с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Теорема 1.1. Для того, чтобы элемент a из ЛНП E был предельной точкой множества $M \subset E$, необходимо и достаточно существование последовательности $\{x_k\} \subset M$, $x_k \neq a$, сходящейся к a : $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

◀ **Необходимость.** Возьмем сходящуюся к нулю числовую последовательность из ненулевых элементов, например, $\varepsilon_k = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$ Так как a — предельная точка M , то, по определению, $\forall \varepsilon_k > 0 \exists x_k \in M$, $x_k \neq a$: $x_k \in S_{\varepsilon_k}(a)$. Поскольку $\rho(x_k, a) = \|x_k - a\| < \varepsilon_k = 1/k$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$, то так построенная последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке a : $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Достаточность. Так как $\exists \{x_k\}$, $x_k \in M$, $x_k \neq a$, причем $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, то, по определению предела, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \|x_n - a\| < \varepsilon$. То есть в любой ε -окрестности точки a содержатся элементы $x_n \in M$, $x_n \neq a$, поэтому точка a является предельной для множества M . ▶

Определение. Пусть M — подмножество в ЛНП E , а M' — множество всех предельных точек M . Объединение множеств $\bar{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M . Если M содержит все свои предельные точки, т. е. $M' \subset M$, то множество M называется *замкнутым*.

Определение. Множество $M \subset E$ векторного пространства E называется *линейным многообразием*, если $\forall x, y \in M, \forall \lambda, \mu: (\lambda x + \mu y) \in M$.

Определение. Замкнутое линейное многообразие L в ЛНП E , $L \subset E$, назовем *подпространством*.

Определение. *Расстоянием от точки x из ЛНП E до множества $L \subset E$* называется величина $\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$.

Для ограниченного снизу числового множества всегда найдется точная нижняя грань. Поскольку норма неотрицательна, то расстояние от точки до подмножества (подпространства) всегда существует. Расстояние $\rho(x, L)$ характеризует наилучшее приближение (т. е. *аппроксимацию*) элемента $x \in E$ элементами подмножества $L \subset E$.

Определение. Элемент $y \in L$, где L — подпространство из ЛНП E , называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) для заданного элемента $x \in E$, если $\rho(x, L) = \|x - y\|$.

Элемент наилучшего приближения существует не всегда, а также может быть не единственным.

Пример 1.3. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^2 , т. е. множество упорядоченных пар вещественных чисел $x = (\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$. Введем норму следующим образом: $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ (убедитесь самостоятельно, что аксиомы нормы выполняются). Рассмотрим подмножество $L \subset \mathbb{R}^2$, $L = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 = \xi_2\} = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Тогда:

- 1) L — подпространство в E ;
- 2) для $x = (-1, 1)$ имеем $\rho(x, L) = 2$, причем ЭНП — не единственный.

◀ 1. Множество L является линейным многообразием (убедитесь самостоятельно). Покажем, что L — замкнуто. Допустим противное: пусть существует элемент $y \notin L$, т. е. $y = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_1 \neq \beta_2$, который является предельной точкой множества L . Тогда для любой точки $u = (\alpha, \alpha)$ из множества L расстояние

$$\rho(y, u) = |\beta_1 - \alpha| + |\beta_2 - \alpha| \geq |(\beta_1 - \alpha) + (\alpha - \beta_2)| = |\beta_1 - \beta_2| = r(y) > 0,$$

т. е. ограничено снизу положительной величиной $r = r(y)$. Следовательно, в окрестности $S_r(y)$ нет ни одного элемента из множества L , и произвольно выбранная точка $y \notin L$ не является предельной для L . Поэтому все предельные точки множества L могут содержаться только в самом этом множестве и L является замкнутым линейным многообразием (подпространством) в \mathbb{R}^2 .

2. Рассмотрим функцию

$$f(t) = |t+1| + |t-1| = \begin{cases} -2t, & t < -1 \\ 2, & -1 \leq t \leq 1 \\ 2t, & 1 < t \end{cases}$$

Очевидно, $\inf_{t \in \mathbb{R}} f(t) = \min_{t \in \mathbb{R}} f(t) = 2$. Для расстояния от точки $x = (-1, 1)$ до подпространства L имеем:

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|u - x\| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} (|\alpha + 1| + |\alpha - 1|) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\alpha) = 2.$$

При этом элементами наилучшего приближения для x являются все точки отрезка $L^* = \{(\alpha, \alpha) | -1 \leq \alpha \leq 1\}$, $L^* \subset L$. ►

1.3. Банаховы пространства

Определение. Пусть X — ЛНП. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$. (\mathbb{N} — множество натуральных чисел.)

Напомним, что для случая $X = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел) в курсе математического анализа был доказан *критерий Коши*: числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Справедлив ли критерий Коши в произвольном ЛНП?

Лемма 1.2. Всякая сходящаяся в ЛНП X последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальна.

◀ Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x \in X$, и $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N: \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда также $\forall p \in \mathbb{N}: \|x_{n+p} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому $\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - x + x - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x\| + \|x - x_n\| < \varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано как угодно малым. Следовательно, последовательность $\{x_n\} \subset X$ является фундаментальной. ►

Упражнение. Покажите самостоятельно, что если последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальна, то последовательность $\{\lambda x_n\}$ также фундаментальна.

Возникает вопрос: а всякая ли фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится в произвольном ЛНП X ? Для каждой ли фундаментальной последовательности существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$?

Определение. ЛНП называется *полным*, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность. Полное ЛНП называется *банаховым* (или пространством Банаха).

Пример 1.4. Простейший пример пространства Банаха — множество вещественных чисел \mathbb{R} с нормой $\|x\| = |x|$.

Пример 1.5. Пространство $\tilde{L}_2[0; T]$ непрерывных на отрезке $t \in [0; T]$ функций с нормой $\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$ — не является банаховым.

◀ Покажем, что это пространство неполно. Выберем на отрезке $t \in [0; T]$ кусочно-гладкую функцию $f(t)$, имеющую разрыв первого рода. Если составить для этой функции тригонометрический ряд Фурье, то, как известно, частичные суммы ряда

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

(непрерывные функции) будут сходиться в среднеквадратичном смысле к функции $f(t)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^T |f(t) - s_n(t)|^2 dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0,$$

где $\{s_n\} \subset \tilde{L}_2[0; T]$, а $f \notin \tilde{L}_2[0; T]$. Это означает, что последовательность $\{s_n\}$ — фундаментальна в $\tilde{L}_2[0; T]$ (доказательство данного утверждения проводится аналогично схеме доказательства леммы 1.2). Однако, в силу единственности предела, последовательность $\{s_n\}$ не может сходиться к элементу пространства $\tilde{L}_2[0; T]$, так как выбранная нами функция $f(t)$ — разрывная. Отсюда следует, что пространство $\tilde{L}_2[0; T]$ не является полным. ▶

Определения. Пусть X — ЛНП (не обязательно банахово), а $\{x_n\}$ — некоторая последовательность, $\{x_n\} \subset X$. Формально составленная сумма $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *рядом* в X , а элемент $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ — *n-ной частичной суммой ряда*. (Заметим, что $\forall n: s_n \in X$, см. определение ЛНП). Ряд называется *сходящимся* по норме ЛНП X , если в X сходится последовательность элементов $\{s_n\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in X$. Элемент s называется *суммой ряда*, а запись $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ означает, что ряд сходится по норме X и его сумма равна s .

1.4. Пространства со скалярным произведением

Определение. Линейное пространство E называется *евклидовым*, если каждой паре его элементов $x, y \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\langle x, y \rangle$, называемое *скалярным произведением*, причем выполняются следующие аксиомы.

$$1^\circ. \forall x \in E: \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ причем } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

$$2^\circ. \forall x, y \in E: \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$3^\circ. \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

$$4^\circ. \forall x, y, z \in E: \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Заметим, что в данном определении ничего не говорится о нормированности пространства E . Однако евклидово пространство можно превратить в нормированное, если ввести норму следующим образом:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.2)$$

Аксиомы нормы 1° и 2° при этом выполняются очевидным образом. Для доказательства выполнения аксиомы 3° (неравенства треугольника) предварительно рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1.3. Норма, введенная в соответствии с определением (1.2), удовлетворяет неравенству Коши – Буняковского (или Шварца):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

◀ Заметим, что $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x - \lambda y\|^2 \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Тогда дискриминант полученного квадратного трехчлена переменной λ : $4(\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, что и доказывает неравенство Коши – Буняковского. ▶

Докажем теперь выполнение аксиомы треугольника. Так как

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2,$$

то, применяя к последнему выражению лемму 1.3, получаем:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \text{ или } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Определения. Пусть E — линейное пространство с введенным скалярным произведением. *Ортогональными элементами* пространства E называются такие элементы $x, y \in E$, что $\langle x, y \rangle = 0$. Ортогональность элементов будем обозначать $x \perp y$. Очевидно, нулевой элемент ортогонален всем элементам пространства. *Ортогональной системой* в E назовем множество попарно ортогональных элементов $\{x_n\} \subset E$.

Теорема 1.2. Если $\{x_k\}_{k=1}^m$ — ортогональная система ненулевых элементов в евклидовом пространстве E , $\{x_k\}_{k=1}^m \subset E$, то элементы $\{x_k\}_{k=1}^m$ — линейно независимы.

◀ Допустим противное. Пусть элементы $\{x_k\}_{k=1}^m$ — линейно зависимы, т. е. существует такой набор чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ (не все из них равны нулю), что $\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k = \theta$. В силу ортогональности системы $\{x_k\}_{k=1}^m$ имеем $\forall j = 1, \dots, m$:

$$0 = \langle x_j, \theta \rangle = \left\langle x_j, \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle x_j, x_k \rangle = \lambda_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{\neq 0}.$$

Поэтому все коэффициенты $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ должны быть нулевыми, а это противоречит допущению о линейной зависимости элементов $\{x_k\}_{k=1}^m$. ▶

Следствие. В n -мерном евклидовом пространстве ортогональная система из n ненулевых элементов образует базис.

В дальнейшем нам понадобятся два свойства скалярного произведения, которые устанавливаются в следующих леммах.

Лемма 1.4. (Свойство непрерывности скалярного произведения.)

Пусть в евклидовом пространстве E заданы две сходящиеся последовательности: $\{x_n\} \subset E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E$, $\{y_n\} \subset E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in E$. Тогда числовая последовательность $\langle x_n, y_n \rangle$ также сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

◀ С учетом леммы 1.3 имеем:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \leq \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Действительно, сходящаяся числовая последовательность $\{\|y_n\|\}$ ограничена, кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$. ▶

Лемма 1.5. (Равенство параллелограмма.) Для любых элементов x, y евклидова пространства E и нормы (1.2) верно:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

$$\leftarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \dots = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Прodelайте опущенные выкладки самостоятельно. ▶

Определение. *Пространством Гильберта* (обычно обозначается H) называется евклидово пространство, которое полно в норме (1.2).

Пример 1.6. Пространство E^n арифметических векторов со скалярным произведением, определенным для векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ как $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ — полное, т. е. гильбертово.

Пример 1.7. Гильбертово пространство $L_2[a, b]$.

◀ В примере 1.5 было рассмотрено пространство $\tilde{L}_2[0; T]$ непрерывных на отрезке $t \in [0; T]$ функций с нормой $\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$ и было показано, что $\tilde{L}_2[0; T]$ не является полным. Можно также показать, что не является полным и пространство $\hat{L}_2[0; T]$ кусочно-

непрерывных на отрезке $t \in [0; T]$ функций с нормой, определяемой тем же выражением.

Во многих теоретических вопросах рассматривают обобщение пространств $\tilde{L}_2[a; b]$ и $\hat{L}_2[a; b]$ — пространство $L_2[a; b]$ функций, для которых норма элемента определяется как $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$, но интеграл понимается в смысле Лебега. Определенный интеграл Лебега представляет собой обобщение «традиционного» интеграла Римана и применим к более широкому классу функций. Теория интеграла Лебега выходит за рамки данного пособия¹, отметим лишь, что пространство $L_2[a; b]$ является полным, а значит, гильбертовым. Кроме того, любой элемент $x \in L_2[a; b]$ можно с какой угодно точностью $\varepsilon > 0$ приблизить по норме этого пространства элементом $\hat{x} \in \hat{L}_2[a; b]$, т. е. кусочно-непрерывной функцией: $\|\hat{x} - x\| < \varepsilon$.

В тех случаях, когда полнота является неотъемлемо важным свойством, необходимо рассматривать пространство $L_2[a; b]$. На практике для описания сигналов обычно ограничиваются множеством кусочно-непрерывных функций $\hat{L}_2[a; b] \subset L_2[a; b]$. Тогда при определении скалярного произведения $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$ и индуцируемой им нормы (1.2) определенный интеграл можно понимать в смысле Римана. ►

1.5. Аппроксимация в гильбертовом пространстве

Сформулируем задачу аппроксимации, которую будем рассматривать далее. Пусть H — гильбертово пространство, а L — подпространство в H , $L \subset H$. Для заданного элемента $x \in H$ необходимо найти элемент наилучшего приближения (ЭНП) $y \in L$, для которого $\rho(x, y) = \rho(x, L)$, т. е.

$$\|x - y\| = \inf_{u \in L} \|x - u\|. \quad (1.3)$$

¹ Подробнее см., например: Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2003. — 488 с.

Теорема 1.3. В гильбертовом пространстве существует, и притом единственный, ЭНП $y \in L$, который является решением задачи аппроксимации (1.3).

◀ Докажем сначала существование ЭНП. Обозначим $d = \inf_{u \in L} \|x - u\|$. Из определения точной нижней грани следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in L: d \leq \|x - u_\varepsilon\| < d + \varepsilon$. Тогда, взяв числовую последовательность $\varepsilon_k = 1/k, k = 1, 2, \dots$, сможем построить последовательность элементов $\{u_k\} \subset L$ такую, что

$$d \leq \|x - u_k\| < d + \frac{1}{k}.$$

Покажем, что $\{u_k\}$ — фундаментальная последовательность. С использованием равенства параллелограмма (лемма 1.5) имеем

$$2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 = \|u_m - u_n\|^2 + 4\left\|x - \frac{u_m + u_n}{2}\right\|^2 \geq \|u_m - u_n\|^2 + 4d^2,$$

поскольку элемент $v = \frac{u_m + u_n}{2} \in L$ и $\rho(x, v) = \|x - v\| \geq \inf_{u \in L} \|x - u\| = d$.

Поэтому $\|u_m - u_n\|^2 \leq 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4d^2$, и тогда

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2 &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \leq 4\left(d + \frac{1}{N}\right)^2 - 4d^2 = \\ &= \frac{8d}{N} + \frac{4}{N^2} < \frac{8d+4}{N}, \quad \text{где } N = \min(n, m). \end{aligned}$$

Таким образом, величину $\|u_m - u_n\|$ можно сделать как угодно малой за счет выбора достаточно большого числа N , т.е. последовательность $\{u_k\}$ — фундаментальная, и вследствие полноты H $\exists \lim u_k = y \in H$. Поскольку сходящаяся последовательность $\{u_k\} \subset L$ и L — подпространство (т.е. замкнутое множество), то верно также: $y \in L$. Поэтому $\rho(x, y) = d$ и существование ЭНП доказано.

Покажем, что ЭНП y — единственный. Для этого допустим противное. Пусть наряду с y существует также другой ЭНП $\tilde{y} \in L$, т.е. $\rho(x, L) = \|x - y\| = \|x - \tilde{y}\| = d$, причем $\tilde{y} \neq y$. На основании равенства параллелограмма (лемма 1.5) получаем:

$$4d^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - \tilde{y}\|^2 = \|y - \tilde{y}\|^2 + 4\left\|x - \frac{y + \tilde{y}}{2}\right\|^2 \geq \|y - \tilde{y}\|^2 + 4d^2,$$

откуда $\|y - \tilde{y}\|^2 = 0$ и $y = \tilde{y}$, т.е. ЭНП — единственный. ▶

Теорема 1.4. Пусть L — подпространство в гильбертовом пространстве H , $y \in L$ — ЭНП для заданного элемента $x \in H$. Тогда любой элемент $u \in L$ ортогонален элементу $v = x - y$: $v \perp u$, что обозначают также $v \perp L$.

◀ Допустим противное, т. е. $\exists u \in L: \langle x - y, u \rangle = \sigma \neq 0$. Тогда $u \neq \theta$, и (см. аксиому 1° скалярного произведения) $\langle u, u \rangle > 0$. Рассмотрим элемент

$\tilde{y} = y + \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u$, который также лежит в подпространстве L :

$\tilde{y} \in L$, так как $y \in L, u \in L$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{y}\|^2 &= \left\langle (x - y) - \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u, (x - y) - \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle = \\ &= \langle x - y, x - y \rangle - 2 \left\langle x - y, \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u, \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle = \\ &= \|x - y\|^2 - \frac{2\sigma}{\langle u, u \rangle} \underbrace{\langle x - y, u \rangle}_{\sigma} + \frac{\sigma^2}{\langle u, u \rangle^2} \langle u, u \rangle = \|x - y\|^2 - \frac{\sigma^2}{\langle u, u \rangle}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\sigma^2}{\langle u, u \rangle} > 0$, то $\|x - \tilde{y}\|^2 < \|x - y\|^2$ и элемент y не является ЭНП. Получили противоречие, поэтому $\forall u \in L: \langle x - y, u \rangle = 0$. ▶

Следствие из теорем 1.3, 1.4. Пусть L — подпространство в H . Тогда $\forall x \in H$ существует единственное разложение $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \perp L$.

◀ Пусть $x = y + z$, ЭНП $y \in L, z \perp L$. Пусть существует также другое представление: $x = a + b$, где $a \in L, b \perp L$. Тогда $y - a + z - b = \theta$, и $\langle y - a + z - b, y - a \rangle = 0 = \langle y - a, y - a \rangle + \langle z, y - a \rangle - \langle b, y - a \rangle = \|y - a\|^2$, т. к. $(y - a) \in L$. Поэтому $y = a$ и $b = x - y$. ▶

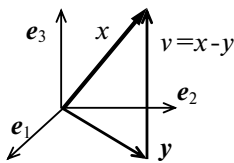


Рис. 1.1

ЭНП $y \in L$ называют также *проекцией* элемента $x \in H$ на подпространство L . Для случая $H = E^3, L = E^2$ результат теоремы 1.4 хорошо известен и имеет несложную геометрическую интерпретацию (см. рис. 1.1).

Теорема 1.4 определяет способ нахождения ЭНП для $x \in H$ в случае конечной размерности

подпространства L с заданным (не обязательно ортогональным) базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$. Поиск коэффициентов разложения $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ осуществляется следующим образом. Так как $\forall k: g_k \in L$, $\langle x - y, g_k \rangle = 0$, то

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j, g_k \right\rangle = \langle x, g_k \rangle - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle g_j, g_k \rangle = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle g_j, g_k \rangle = \langle x, g_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Определитель системы линейных уравнений (1.4) есть определитель матрицы Грама $\mathbf{G} = \{\langle g_j, g_k \rangle\}_{k,j=1}^n$, причем $\det \mathbf{G} \neq 0$ в силу линейной независимости элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. (Напомним, что $\det \mathbf{G} = 0$ тогда и только тогда, когда элементы $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ линейно зависимы.) Следовательно, система уравнений (1.4) имеет единственное решение — набор коэффициентов $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, который задает ЭНП $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$.

Если же элементы базиса подпространства $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset L$ не только линейно независимы, но и ортогональны, то поиск коэффициентов $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ упрощается (убедитесь самостоятельно):

$$\lambda_j = \frac{\langle x, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle}. \quad (1.5)$$

Определение. Пусть L — подпространство в H . Совокупность всех элементов из H , ортогональных к L , $L^\perp = \{x \in H | x \perp L\}$, называется *ортогональным дополнением* подпространства L .

Теорема 1.5. Пусть L — подпространство в гильбертовом пространстве H . Тогда L^\perp также является подпространством в H .

◀ Нужно доказать, что L^\perp — замкнутое линейное многообразие.

Линейность. $\forall u \in L, \forall x, y \in L^\perp \forall \alpha, \beta$ — скаляров:

$$\langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle = 0.$$

То есть для любой линейной комбинации $z = \alpha x + \beta y$ элементов из L^\perp имеем: $z \perp L$, следовательно, $z \in L^\perp$ и L^\perp — линейное многообразие.

Замкнутость. Пусть z — произвольная предельная точка множества L^\perp . Тогда по теореме 1.1 найдется последовательность $\{z_n\} \subset L^\perp, z_n \neq z: \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$. Имеем $\forall u \in L: \langle u, z_n \rangle = 0$, но в силу непрерывности скалярного произведения (лемма 1.4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, u \rangle = \langle z, u \rangle = 0$. Следовательно, $z \in L^\perp$ и множество L^\perp содержит все свои предельные точки, т.е. замкнуто. ▶

Определение. Будем говорить, что гильбертово пространство H разлагается в ортогональную сумму подпространств L_1, L_2, \dots, L_n и записывать это как $H = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$, если:

- 1) все подпространства L_1, L_2, \dots, L_n попарно ортогональны, т.е. $\forall u \in L_i, \forall v \in L_j: \langle u, v \rangle = 0$, если $i \neq j$;
- 2) $\forall x \in H$ существует разложение $x = \sum_{i=1}^n x_i$, где $x_i \in L_i$.

Заметим, что если L — подпространство в гильбертовом пространстве H , то $H = L \oplus L^\perp$, что вытекает непосредственно из определения L^\perp , теорем 1.3—1.5 и их следствий.

Теорема 1.6. Пусть в гильбертовом пространстве H задано конечномерное подпространство L с ортогональным базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, а $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$ — ЭНП для заданного элемента $x \in H$. Тогда для ошибки приближения — вектора $x - y$ справедливы равенства:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|g_j\|^2.$$

◀ Поскольку $\langle x - y, y \rangle = 0$ (см. теорему 1.4), то $\langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle$, $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$, причем $\|y\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j, \sum_{m=1}^n \lambda_m g_m \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{m=1}^n \lambda_m \langle g_j, g_m \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|g_j\|^2$. ▶

Пусть теперь в H задана бесконечная последовательность ненулевых ортогональных векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$. Это означает, что H — бесконечномерное, так как ортогональные элементы линей-

но независимы. Рассматривая первые элементы $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ как базис, получаем некоторое линейное многообразие L_n , «натянутое» на $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$. Можно показать, что L_n — замкнуто, т.е. является подпространством. Так как L_n — конечномерно, то с учетом теоремы 1.6 для ЭНП $y_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j$, $y_n \in L_n$, имеем:

$$\|x - y_n\|^2 = \|x\|^2 - \|y_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2. \quad (1.6)$$

Числовая последовательность $s_n = \|y_n\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2$ ограничена сверху, так как $\forall n \ s_n = \|x\|^2 - \|x - y_n\|^2 \leq \|x\|^2$, и является неубывающей ($s_{n+1} \geq s_n$). Поэтому $\{s_n\}$ — сходится. Сходимость последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ означает сходимость ряда $s = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2$, причем (см. (1.6))

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2 \leq \|x\|^2. \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) называется *неравенством Бесселя*.

Определения. Ортогональная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ называется *полной* в гильбертовом пространстве H , если $\forall x \in H$ существует разложение:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k, \quad (1.8)$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\| = 0$. Ряд (1.8) называется *рядом Фурье* (по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$), а числа $\{\lambda_k\}$ — *коэффициентами Фурье*.

Теорема 1.7. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — полная ортогональная система в гильбертовом пространстве H . Тогда $\forall x \in H$ для коэффициентов Фурье $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ верна формула (1.5).

◀ Обозначим частичную сумму $x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k$. В силу непрерывности скалярного произведения и ортогональности системы $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем:

$$\langle x, g_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, g_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k, g_j \right\rangle =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle g_k, g_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle g_k, g_j \rangle = \lambda_j \langle g_j, g_j \rangle,$$

откуда следует формула (1.5). ►

Теорема 1.8. Ортогональная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ является полной в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда $\forall x \in H$ неравенство (1.7) выполняется как равенство:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2,$$

которое называется *равенством Парсеваля — Стеклова*.

◀ Действительно, понятие полной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ означает, что

$$\forall x \in H: x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \quad \text{и} \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \right\|^2 = 0,$$

что эквивалентно равенству $\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2 = 0$, которое получается предельным переходом в соотношении (1.6). ►

Важнейшим примером гильбертова пространства является пространство функций $L_2[a, b]$ (см. пример 1.7). При этом под $L_2(\mathbb{R}) = L_2(-\infty; \infty)$ будем понимать пространство всех функций, интегрируемых с квадратом на всей числовой оси.

1.6. Примеры ортогональных систем в пространстве L_2

Элементами в векторном пространстве L_2 являются функции. Приведем ряд примеров ортогональных функциональных базисов $\{\varphi_k\}$, которые нашли широкое применение для обработки сигналов.

Пример 1.8. Тригонометрическая система функций $\left\{ 1, \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2[a, a+T]$ на любом отрезке $t \in [a, a+T]$ длины T .

Пример 1.9. Система ортогональных многочленов Лежандра $\{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n)$ является полной в пространстве $L_2[-1, 1]$.

При цифровой обработке сигналов использование степенных многочленов для представления сигналов часто бывает более предпочтительным по сравнению с тригонометрическими функциями, так как реализация вычислений последних обычно более сложна. В этой связи еще более интересны базисы кусочно-постоянных функций.

Пример 1.10. Систему функций Радемахера $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ определим следующим образом. Для $x \in [0, 1)$ положим

$$r_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0; 1/2) \\ -1 & \text{при } x \in [1/2; 1) \end{cases}$$

и периодически продолжим $r_0(x)$ на всю числовую ось с периодом $T = 1$. Остальные функции системы определим так: $r_k(x) = r_0(2^k x)$, $k = 1, 2, \dots$ (см. рис. 1.2).

Для дальнейшего изложения удобно использовать следующее обозначение: $\Delta_m^n = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда из определения

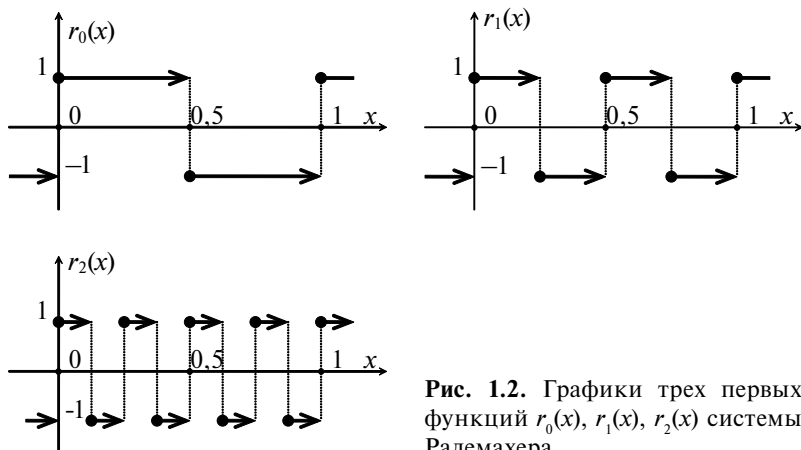


Рис. 1.2. Графики трех первых функций $r_0(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$ системы Радемахера

функций Радемахера и приведенных иллюстраций видны следующие свойства данной системы.

1°. Кусочное постоянство.

$$\forall x \in \Delta_m^{k+1} : r_k(x) = \text{const} = \begin{cases} 1, & \text{если } m - \text{четное} \\ -1, & \text{если } m - \text{нечетное} \end{cases}.$$

На более мелких подынтервалах, естественно, функции также постоянны:

$$\forall k \geq 0, \forall j \geq k+1, \forall x \in \Delta_m^j, m \in \mathbb{Z} : r_k(x) = \text{const}. \quad (1.9)$$

2°. Интеграл по периоду функции $r_k(x)$ равен нулю. Поэтому $\forall m \in \mathbb{Z}$

$\int_{\Delta_m^k} r_k(x) dx = 0$ (как интеграл по одному периоду $T = |\Delta_m^k| = 2^{-k}$) и

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall j = 0, \dots, k : \int_{\Delta_m^j} r_k(x) dx = 0, \quad (1.10)$$

как интеграл по N периодам, $N = \frac{|\Delta_m^j|}{|\Delta_m^k|} = \frac{2^{-j}}{2^{-k}} = 2^{k-j}$.

3°. Система функций $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$ — ортонормированна на отрезке $x \in [0, 1]$.

◀ Очевидно, $\forall k : \langle r_k, r_k \rangle = \int_0^1 (r_k(x))^2 dx = 1$, т. е. функции нормированны. Покажем, что $\forall m \neq k : \langle r_k, r_m \rangle = \int_0^1 r_k(x)r_m(x) dx = 0$. Пусть для определенности $k > m$, тогда:

$$\begin{aligned} \langle r_k, r_m \rangle &= \int_{\Delta_0^0} r_k(x)r_m(x) dx = \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{\Delta_j^k} r_k(x) \underbrace{r_m(x)}_{\substack{c(m,k,j) \\ \text{см. (1.9)}}} dx = \\ &= \sum_{j=0}^{2^k-1} \underbrace{c(m,k,j)}_{\pm 1} \underbrace{\int_{\Delta_j^k} r_k(x) dx}_{=0, \text{ см. (1.10)}} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Таким образом, система функций $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной, но она не является базисом в пространстве $L_2[0, 1]$, поскольку не является полной.

Упражнение. Покажите самостоятельно по схеме, аналогичной доказательству свойства 3°, что ненулевой элемент $f(x) = r_0(x)r_1(x)$, $\|f(x)\| = 1$, $f(x) \in L_2[0, 1]$ является ортогональным любой из функций

Радемахера, т.е. $\forall k: \langle f, r_k \rangle = 0$. Следовательно, система $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — неполная и не является базисом в $L_2[0, 1]$.

Пример 1.11. Систему функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определим следующим образом. Представим целое число $n \geq 0$ в виде двоичного разложения: $n = \sum_{k=0}^{l(n)} n_k 2^k$, $n_k \in \{0, 1\}$. Тогда функции системы Уолша выражаются при помощи функций Радемахера следующим образом:

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{l(n)} (r_k(x))^{n_k} = \prod_{k: n_k=1} r_k(x), \quad (1.11)$$

где конечное число $l = l(n)$ определяется номером n функции Уолша, $n \leq 2^{l+1} - 1$. Таким образом, функция Уолша $w_n(x)$ определяется как произведение функций Радемахера с номерами, которые соответствуют единичным коэффициентам в двоичном разложении числа n . При этом если все коэффициенты $\{n_k\}$ двоичного разложения равны нулю, то считаем последнее произведение в (1.11) равным единице, т.е. $w_0(x) = 1$. Поясним определение системы $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ построением ее первых функций, см. таблицу. График функции $w_3(x) = r_0(x)r_1(x)$ приведен на рис. 1.3.

n	n_2	n_1	n_0	$w_n(x)$
0	0	0	0	$w_0(x) = 1$
1	0	0	1	$w_1(x) = r_0(x)$
2	0	1	0	$w_2(x) = r_1(x)$
3	0	1	1	$w_3(x) = r_0(x)r_1(x)$
4	1	0	0	$w_4(x) = r_2(x)$

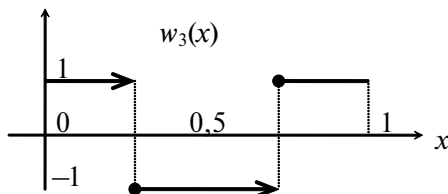


Рис. 1.3. Функция Уолша $w_3(x)$

Замечание. Очевидно, что функции системы Уолша имеют период $T = 1$.

Упражнение. Постройте самостоятельно по определению (1.11) графики функций $w_3(x), \dots, w_7(x)$.

Теорема 1.9. Система функций Уолша (1.11) — ортонормированна на интервале $x \in [0, 1)$.

◀ Очевидно, что $\forall n: \langle w_n, w_n \rangle = 1$. Пусть теперь $k \neq n$:

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_n \rangle &= \int_0^1 \left(\prod_{j:k_j=1} r_j(x) \right) \left(\prod_{j:n_j=1} r_j(x) \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\prod_{j:k_j=n_j=1} (r_j(x))^2 \right) \left(\prod_{j:n_j \neq k_j} r_j(x) \right) dx = \int_0^1 \prod_{j:n_j \neq k_j} r_j(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $n \neq k$ и не все коэффициенты n_j, k_j одинаковы, то в полученном подынтегральном произведении имеется по крайней мере один сомножитель. Положим $\tilde{j} = \max_{n_j \neq k_j} j$ и продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_n \rangle &= \int_0^1 r_{\tilde{j}}(x) \prod_{\substack{j:n_j \neq k_j \\ j < \tilde{j}}} r_j(x) dx = \sum_{m=0}^{2^{\tilde{j}}-1} \int_{\Delta_m^{\tilde{j}}} r_{\tilde{j}}(x) \overbrace{\prod_{\substack{j:n_j \neq k_j \\ j < \tilde{j}}} r_j(x)}^{\text{константа } c(k,n,m), \text{ см.(1.9)}} dx = \\ &= \sum_{m=0}^{2^{\tilde{j}}-1} \underbrace{c(k,n,m)}_{\pm 1} \underbrace{\int_{\Delta_m^{\tilde{j}}} r_{\tilde{j}}(x) dx}_{=0, \text{ см.(1.10)}} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема 1.10. Система Уолша (1.11) является полной в пространстве $L_2[0, 1]$. (Примем утверждение теоремы без доказательства.)

Так как функции системы Уолша принимают лишь два значения ± 1 , они очень удобны для программных вычислений и для аппаратной реализации в цифровой аппаратуре.

Пример 1.12. Систему функций Хаара $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определим на полуинтервале $x \in [0, 1)$ следующим образом. Положим $h_0(x) = 1$. Для $n > 0$ номер базисной функции $h_n(x)$ представим следующим

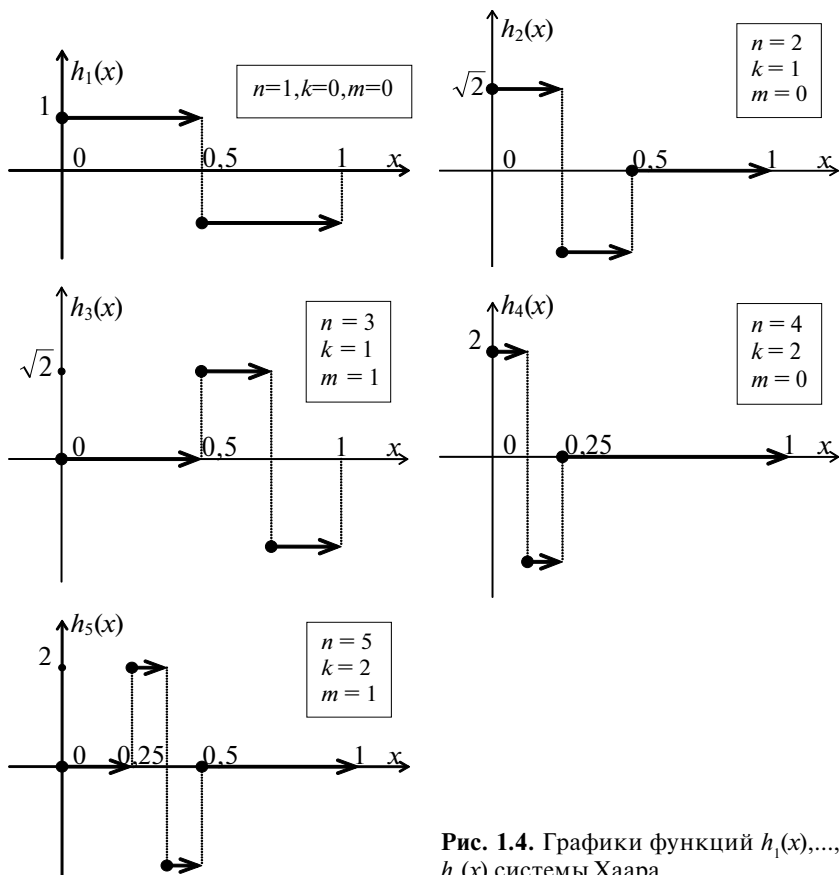


Рис. 1.4. Графики функций $h_1(x), \dots, h_5(x)$ системы Хаара

образом: $n = 2^k + m$, где целые числа $k \geq 0$, $0 \leq m \leq 2^k - 1$ однозначно определяются по номеру $n > 0$. Тогда

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_{2m}^{k+1} \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_{2m+1}^{k+1} \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_m^k = \Delta_{2m}^{k+1} \cup \Delta_{2m+1}^{k+1} \end{cases}. \quad (1.12)$$

Приведем графики первых функций системы $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, см. рис. 1.4.

Рассмотренным ранее свойствам системы Радемахаера во многом аналогичны следующие очевидные свойства системы Хаара ($n > 0$, $n = 2^k + m$, $k \geq 0$, $0 \leq m \leq 2^k - 1$).

$$1^\circ. \forall j \geq k+1, \forall l \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}, \forall x \in \Delta_l^j :$$

$$h_n(x) = \text{const} \in \{0, -2^{k/2}, 2^{k/2}\}.$$

$$2^\circ. \forall j \in \{0, \dots, k\}, \forall l \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\} : \int_{\Delta_l^j} h_n(x) dx = 0.$$

Теорема 1.11. Система функций Хаара (1.12) — ортонормированна на интервале $x \in [0; 1]$.

◀ В соответствии с определением (1.12)

$$\langle h_n(x), h_n(x) \rangle = \int_{\Delta_m^k} 2^{k/2} 2^{k/2} dx = 1,$$

где $n = 2^k + m$.

Рассмотрим теперь скалярное произведение $\langle h_n(x), h_\nu(x) \rangle$, где $n = 2^k + m$, $\nu = 2^\gamma + \mu$, причем $n \neq \nu$. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть $k \neq \gamma$, для определенности положим $k \geq \gamma + 1$.

Тогда

$$\langle h_n(x), h_\nu(x) \rangle = \sum_{l=0}^{2^k-1} \int_{\Delta_l^k} h_n(x) \underbrace{h_\nu(x)}_{\substack{c(v,k,l)=\text{const} \\ \forall x \in \Delta_l^k}} dx = \sum_{l=0}^{2^k-1} c(v,k,l) \underbrace{\int_{\Delta_l^k} h_n(x) dx}_0 = 0,$$

как следует из приведенных выше свойств системы Хаара.

Случай 2. Пусть $\gamma = k$, но $m \neq \mu$. Так как (см. (1.12)) $h_n(x) = 0$ при $x \notin \Delta_m^k$, $h_\nu(x) = 0$ при $x \notin \Delta_\mu^k$, то $\forall x \in [0; 1] h_n(x)h_\nu(x) = 0$, поскольку для $m \neq \mu$ имеем: $\Delta_m^k \cap \Delta_\mu^k = \emptyset$. Поэтому вновь $\langle h_n(x), h_\nu(x) \rangle = 0$. Таким образом, система Хаара является ортонормированной. ▶

Теорема 1.12. Система Хаара (1.12) является полной в пространстве $L_2[0, 1]$. (Примем утверждение теоремы без доказательства.)

Упражнение. Разложите функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/4; 1/2), \\ 2, & x \in [1/2; 3/4), \\ 0, & x \notin [1/4; 3/4) \end{cases}$$

в ряд Фурье по системам Хаара и Уолша. Проверьте выполнение равенства Парсеваля.

1.7. Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье

Широкий класс устройств в электротехнике и радиоэлектронике описывается математической моделью линейной инвариантной во времени (ЛИВ) системы, преобразующей входной сигнал — функцию времени $x(t)$ — в выходной сигнал $y(t) = L\{x(t)\}$ по правилу, определяемому формулой интегральной свертки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \text{ где } h(\tau) \text{ — импульсная характеристика системы.}$$

Несложно показать, что для таких ЛИВ-систем функции вида $e^{i\omega t}$ являются *собственными*, т. е. $L\{e^{i\omega t}\} = Ae^{i\omega t}$, где $A = A(\omega)$ — некоторое комплексное число. Это означает, что гармонические колебания не изменяют своей формы при прохождении через ЛИВ-систему, измениться могут лишь их амплитуда и фаза. По этой причине базис гармонических колебаний наиболее удобен для анализа ЛИВ-систем, а *спектральное* (или *частотное*) представление функций при помощи преобразования Фурье является исключительно важным математическим аппаратом, используемым для анализа и синтеза систем обработки сигналов.

Напомним следующую теорему.

Теорема 1.13. Если функция $f(t)$ имеет период T и является кусочно-гладкой на периоде, то ее ряд Фурье¹ сходится к функции $f(t)$ в каждой точке ее непрерывности и к значению $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$ в точках разрыва, то есть

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right), \quad (1.13)$$

где коэффициенты Фурье находятся по формулам:

¹ Если не говорится, какая система функций рассматривается в виде базиса для построения ряда Фурье (см. раздел 1.5), то традиционно подразумевается тригонометрическая система.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.14)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Упражнение. Убедитесь, что формула (1.14) является частным случаем (1.5) для $f \in L_2[-T/2; T/2]$, см. также пример 1.8.

Часто, однако, более удобной является комплексная форма записи ряда Фурье (1.13):

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t}, \quad (1.15)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.16)$$

Реальные сигналы, чаще всего, представляют собой аperiodические функции, искусственная периодизация которых, необходимая для корректного использования разложений (1.13) или (1.15), представляет собой неоднозначную процедуру, приводящую к искажению сигнала. Поступим следующим образом. Обозначим $\nu_k = k/T$, $\Delta\nu_k = \nu_{k+1} - \nu_k = 1/T = \Delta\nu$, тогда с использованием данных обозначений из (1.15) и (1.16) получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(u) \exp(-i2\pi\nu_k u) du \right) e^{i2\pi\nu_k t} \Delta\nu_k.$$

Далее непериодический сигнал представим как периодический с бесконечно большим периодом, см. рис. 1.5.

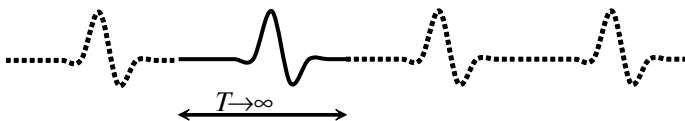


Рис. 1.5. Переход от периодического сигнала к непериодическому

Предположим, что существует интеграл (см. (1.16))

$$S(v_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} c_k T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} f(u) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} u\right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi v_k u} du.$$

При формальном переходе к пределу при $T \rightarrow \infty$ в ряде из (1.15) получим:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(v_k) e^{i2\pi v_k t} \Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \exp(2\pi i v t) dv$$

в случае существования последнего интеграла, который понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \exp(2\pi i v t) dv = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} S(v) \exp(2\pi i v t) dv.$$

Данный интеграл носит название *интеграла Фурье*. Условия, при которых функция допускает представление в виде интеграла Фурье, определяет следующая теорема.

Теорема 1.14. Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$, является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке $t \in [a, b] \subset (-\infty; \infty)$ и в точках разрыва $f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$. Тогда она представима в виде интеграла

Фурье:

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} S(v) \exp(2\pi i v t) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) e^{2\pi i v t} dv, \quad (1.17)$$

где

$$S(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i v t} dt, \quad (1.18)$$

причем $S(v)$ — непрерывная функция.

Функция $S(v)$ из (1.18) носит название *частотного спектра*, или *спектральной плотности*, или *спектральной характеристики* функции (сигнала) $f(t)$. Представления (1.18) и (1.17) называют соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье сигнала $f(t)$.

Их записывают также с использованием в качестве аргумента спектральной плотности циклической частоты $\omega = 2\pi\nu$:

$$\widehat{S}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{S}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.14 сигнал можно описать как во *временной области*, т.е. через функцию времени $f(t)$, так и в *частотной области*, через функцию частоты $S(\nu)$, оба представления взаимно однозначно соответствуют друг другу: $f(t) \leftrightarrow S(\nu)$.

Отметим ряд важных свойств интегрального преобразования Фурье.

1°. Сопряженная симметрия. Для любой вещественной функции $f(t)$: $S(\nu) = \overline{S(-\nu)}$. (Докажите самостоятельно.)

2°. Линейность. $\forall x(t) \leftrightarrow S_x(\nu), \forall y(t) \leftrightarrow S_y(\nu), \forall \alpha, \beta$:
 $f(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow S(\nu) = \alpha S_x(\nu) + \beta S_y(\nu)$.

3°. Изменение масштаба. $\forall f(t) \leftrightarrow S(\nu), \forall \alpha > 0$:

$$\begin{aligned} f(\alpha t) \leftrightarrow S_\alpha(\nu) &= \frac{1}{\alpha} S(\nu / \alpha). \\ \blacktriangleleft S_\alpha(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)e^{-2\pi i \nu t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)e^{-2\pi i \frac{\nu}{\alpha}(\alpha t)} d(\alpha t) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi i (\nu/\alpha)u} du = \frac{1}{\alpha} S(\nu / \alpha). \blacktriangleright \end{aligned}$$

4°. Задержка сигнала. $\forall f(t) \leftrightarrow S(\nu), \forall t_0$: $f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-2\pi i \nu t_0} S(\nu)$.
(Докажите самостоятельно.)

5°. Сдвиг спектра. $\forall f(t) \leftrightarrow S(\nu), \forall \alpha$: $f(t)e^{2\pi i \alpha t} \leftrightarrow S(\nu - \alpha)$.
(Докажите самостоятельно.)

6°. Свертка сигналов. $\forall u(t) \leftrightarrow S_u(\nu), \forall w(t) \leftrightarrow S_w(\nu)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)w(x-t)dt \leftrightarrow S(\nu) &= S_u(\nu)S_w(\nu). \\ \blacktriangleleft S(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)w(x-t)dt \right) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(x-t)e^{-2\pi i \nu x} dx}_{\text{см. свойство 4}^\circ} dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)S_w(v)e^{-2\pi ivt} dt = S_u(v)S_w(v). \blacktriangleright$$

7°. Произведение сигналов. $\forall u(t) \leftrightarrow S_u(v), \forall w(t) \leftrightarrow S_w(v)$:

$$f(t) = u(t)w(t) \leftrightarrow S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x)S_w(v-x)dx.$$

(Докажите самостоятельно по аналогии с доказательством свойства 6°.)

8°. Равенство Парсеваля. $\forall f(t) \leftrightarrow S(v): E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv$
(величину E называют энергией сигнала).

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft E &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \int_{-\infty}^{\infty} S(v)e^{2\pi ivt} dv dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{2\pi ivt} dt dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ivt} dt dv = \int_{-\infty}^{\infty} S(v)\overline{S(v)}dv = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv. \blacktriangleright \end{aligned}$$

9°. Дифференцирование во временной области. Если $f(t) \leftrightarrow S(v)$ и функция $f(t)$ дифференцируема, причем $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, то

$$f'(t) \leftrightarrow 2\pi ivS(v).$$

◀ Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2\pi ivt} dt = \underbrace{f(t)e^{-2\pi ivt}}_{\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi iv)f(t)e^{-2\pi ivt} dt = 2\pi ivS(v). \blacktriangleright$$

10°. Дифференцирование в частотной области. Если $f(t) \leftrightarrow S(v)$ и функция $S(v)$ дифференцируема, причем $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} S(v) = 0$, то

$$-2\pi itf(t) \leftrightarrow S'(v).$$

(Докажите самостоятельно аналогично доказательству свойства 9°.)

Упражнение. Покажите, что для функции и ее спектра $f(t) \leftrightarrow S(v)$

условие $\left. \frac{d^m}{dv^m} S(v) \right|_{v=0} = 0$ эквивалентно условию $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t)dt = 0$ для

любого натурального числа m .

Определение. Амплитудным спектром сигнала $f(t)$ называется модуль $|S(v)|$ спектральной плотности $S(v)$, а фазовым спек-

тром — ее аргумент, взятый с противоположным знаком¹:
 $\varphi(\nu) = -\arg S(\nu)$.

Амплитудный и фазовый спектры позволяют записать спектральную плотность в показательной форме: $S(\nu) = |S(\nu)|e^{-i\varphi(\nu)}$. Будем считать по определению, что $\varphi(\nu) \in (-\pi; \pi]$.

Замечание. Из свойства 4° следует, что сдвиги сигнала во временной области влияют в частотной области лишь на фазовый спектр, но не изменяют амплитудный спектр сигнала.

Пример 1.13. Найти амплитудный и фазовый спектры сигнала, представляющего собой прямоугольный импульс длительности T :

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T}, & \text{при } t \in [0, T] \\ 0, & \text{при } t \notin [0, T] \end{cases}.$$

◀ Найдем сначала спектральную плотность функции $g(t) = f(t + 0,5T)$:

$$S_g(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i\nu t} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-2\pi i\nu t} dt = \frac{e^{\pi i\nu T} - e^{-\pi i\nu T}}{2\pi i\nu\sqrt{T}} = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu\sqrt{T}}.$$

Так как $f(t) = g(t - 0,5T)$, то на основании свойства 4° получаем:

$$S_f(\nu) = e^{-\pi i\nu T} \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu\sqrt{T}}, \text{ откуда находим амплитудный спектр:}$$

$$|S_f(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu} \right|.$$

Для фазового спектра $\varphi(\nu)$ рассмотрим сначала частоты $\nu \geq 0$.

При $\nu = k/T$, $k = 1, 2, \dots$ $\arg S_f(\nu)$ не определен, так как $S_f(\nu) = 0$.

При $\nu \in (2k/T; (2k+1)/T)$, $k = 0, 1, \dots$, имеем $|\sin \pi\nu T| = \sin \pi\nu T$,

$$S_f(\nu) = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu\sqrt{T}} e^{-\pi i\nu T} = \underbrace{\left| \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu\sqrt{T}} \right|}_{|S_f(\nu)|} e^{-\pi i\nu T} = |S_f(\nu)| e^{-i\varphi(\nu)}, \text{ т. е.}$$

¹ Нередко фазовым спектром называют аргумент (без смены знака) $\varphi(\nu) = \arg S(\nu)$.

$$e^{-i\varphi(\nu)} = e^{-i\nu T} \text{ и } \varphi(\nu) = \arg(e^{i\nu T}), \text{ причем } \varphi(\nu) = \varphi\left(\nu + \frac{2}{T}\right).$$

При $\nu \in ((2k+1)/T; (2k+2)/T)$, $k=0,1,\dots$, имеем $|\sin \pi \nu T| = -\sin \pi \nu T$,

$$S_f(\nu) = \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu \sqrt{T}} e^{-i\nu T} = -\left| \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu \sqrt{T}} \right| e^{-i\nu T} = |S_f(\nu)| e^{-i\varphi(\nu)}, \text{ т. е.}$$

$$e^{-i\varphi(\nu)} = -e^{-i\nu T} = e^{-i\nu T + i\pi} \text{ и } \varphi(\nu) = \arg(e^{i\pi(\nu T - 1)}),$$

и вновь
$$\varphi(\nu) = \varphi\left(\nu + \frac{2}{T}\right).$$

Таким образом, для неотрицательных частот достаточно привести один период фазового спектра $\varphi(\nu)$. Для $\nu \in [0; 2/T)$ получаем:

$$\varphi(\nu) = \begin{cases} \pi \nu T, & \text{при } \nu \in (0; 1/T) \\ \pi \nu T - \pi, & \text{при } \nu \in (1/T; 2/T) \end{cases}.$$

Вид функции $\varphi(\nu)$ для $\nu < 0$ находим на основании свойства 1° интеграла Фурье, которое означает, что $\varphi(-\nu) = -\varphi(\nu)$. Графики амплитудного и фазового спектров приведены на рис. 1.6. ▶

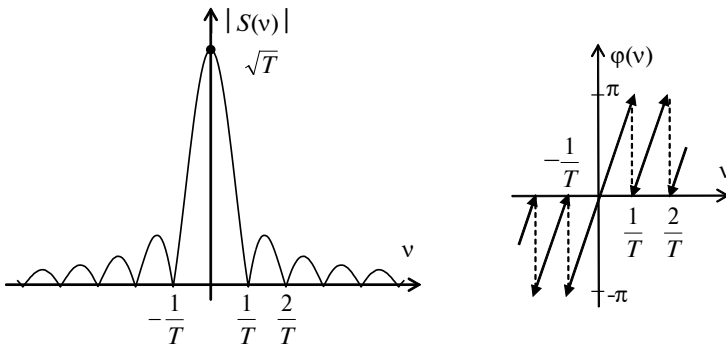


Рис. 1.6. Графики амплитудного (слева) и фазового (справа) спектров сигнала из примера 1.13

Упражнение. Используя свойства 2°—4° преобразования Фурье и результаты решения примера 1.13, найдите амплитудный и фазовый спектры функции