

Содержание

Предисловие	6
Глава 1	
Вычислительный эксперимент	7
1.1. Роль вычислительного эксперимента	7
1.2. Постановка вычислительного эксперимента	9
Глава 2	
Основные уравнения математической физики	12
2.1. Распространение малых возмущений и колебания	12
2.2. Уравнение теплопроводности (диффузии)	13
2.3. Уравнения Максвелла	13
2.4. Уравнение Шредингера	14
2.5. Уравнения газогидродинамики	14
2.6. Уравнения Навье–Стокса	15
2.7. Стационарные уравнения	16
2.8. Постановка основных задач для уравнений математической физики	17
2.8.1. Задача Коши	18
2.8.2. Краевая задача для стационарных уравнений	19
2.8.3. Смешанная краевая задача	20
Глава 3	
Основные методы построения и анализа разностных схем	21
3.1. Обсуждение основных понятий на примере разностных схем для уравнения переноса	22
3.2. Основные свойства разностных схем: аппроксимация и устойчивость	26
3.3. Анализ аппроксимации	29
3.4. Критерий фон Неймана для анализа устойчивости разностных схем	32
3.5. Принцип замороженных коэффициентов	35
3.6. Шаблон разностной схемы	37

Глава 4	
Распространение тепла (диффузия)	39
4.1. Разностная схема для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.....	39
4.2. Построение разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.....	47
4.3. Метод расщепления по пространственным переменным	52
4.4. Разностные схемы для решения многомерного уравнения теплопроводности.....	54
4.5. Численное решение задачи Стефана.....	64
Глава 5	
Распространение акустических волн	68
5.1. Разностная схема для уравнения колебаний.....	68
5.2. Диссипация и дисперсия сеточного волнового решения	71
5.3. Схема Лакса–Вендроффа.....	74
5.4. Характеристическая форма уравнений акустики.....	80
5.5. Недиссипативная схема Ф. Роу.....	82
5.6. Метод С. К. Годунова.....	85
5.6.1. Схема первого порядка.....	86
5.6.2. Схема второго порядка.....	91
5.7. Кусочно-экспоненциальный метод.....	92
5.8. Разностные схемы для решения многомерных задач..	98
5.9. Заключительные замечания.....	109
Глава 6	
Движение сжимаемой жидкости (газа)	111
6.1. Схема Лакса–Вендроффа для одномерных задач.....	112
6.2. Метод искусственной вязкости.....	117
6.3. Задача о распаде разрыва.....	120
6.4. Схема С. К. Годунова.....	123
6.5. Метод взвешенного усредненного потока.....	127
6.6. Метод уменьшения суммарного отклонения (TVD)....	132
6.6.1. Концепция TVD и ограничители потоков.....	133
6.6.2. Ограничение потоков в схеме метода WAF.....	138
6.7. Численное решение многомерных задач.....	140
6.8. Заключительные замечания.....	151

Глава 7	
Стационарные уравнения	153
7.1. Выбор метода.....	154
7.2. Формулировка разностных уравнений в виде системы уравнений.....	155
7.3. Применение быстрого преобразования Фурье	164
7.4. Метод Конкуса и Голуба	168
7.5. Метод установления	171
7.6. Заключительные замечания	178
Глава 8	
Движение несжимаемой вязкой жидкости	180
8.1. Введение.....	180
8.2. Разностные схемы в переменных функции тока – завихренность.....	184
8.3. Метод маркеров и ячеек	192
Приложение А	
Параметры и дисперсионное соотношение для схемы РЕМ	201
Приложение Б	
Решение задачи о распаде разрыва для идеального газа	203
Б.1. Конфигурация 1.....	206
Б.2. Конфигурация 2.....	206
Б.3. Конфигурация 3.....	207
Б.4. Конфигурация 4.....	207
Б.5. Определение решения в точке $x = 0$	208
Приложение В	
Краткое описание прилагаемых программ	209
Литература	223

Посвящается моим родителям

Предисловие

Вычислительная физика является одним из методов физического исследования, который использует численное моделирование. При этом компьютер играет роль прибора, который дает новые возможности для изучения свойств различных физических моделей. Компьютер, как и любой другой прибор, бесполезен без соответствующих методик его использования. Роль вычислительной физики и состоит в применении и развитии вычислительных методик, использующих компьютер, для того, чтобы получить как можно более полное представление о реальных физических процессах. Развитие компьютерной техники и численных методов дает нам возможность не только работать со все более сложными моделями, но и применять различные методы визуализации, которые позволяют лучше понять природу исследуемых явлений и открывают перед нами всю красоту этих явлений.

С математической точки зрения многие физические явления описываются уравнениями в частных производных. Поэтому численные методы решения этих уравнений составляют одну из основных частей вычислительной физики. Наиболее простыми и наглядными являются конечно-разностные методы. Применению этих методов к решению уравнений математической физики и посвящена эта книга.

Прежде всего книга предназначена для студентов старших курсов физических и инженерных специальностей. Уровень изложения материала предполагает, что читатель освоил курсы уравнений математической физики и методов вычислений. Относительно курса методов вычислений, следующая книга часто цитируется в тексте, поэтому для нее введена специальная аббревиатура: ОНВ — *Зализняк В. Е.*, Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков и инженеров, РХД, Москва-Ижевск, 2006.

Книга дополняется небольшим пакетом программ, реализующим большинство изложенных методов. Этот пакет представляет собой набор функций для среды MATLAB и может быть использован как для практических занятий, так и при выполнении курсовых и дипломных проектов.

В. Е. Зализняк,
Сибирский Федеральный Университет, 2007

ГЛАВА I

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В этой книге мы обсудим область научного исследования, в которой компьютер играет центральную роль. Рассматриваемые нами темы часто называют «численным моделированием» или «вычислительной наукой».

В научном исследовании основой вычислительной науки служит математическая модель интересующего нас физического явления. Уравнения математической модели переводятся в дискретную алгебраическую форму, поддающуюся численному решению. Дискретные алгебраические уравнения описывают вычислительную модель, которая, если перевести ее в последовательность команд на каком-нибудь языке программирования, дает программу моделирования для компьютера. После этого компьютер и программа позволяют исследовать эволюцию модельной физической системы в вычислительных экспериментах. Методы дискретизации, используемые при создании численных моделей, включают в себя конечно-разностные методы, методы конечных и граничных элементов и методы частиц. В этой книге мы будем иметь дело с первым подходом к построению вычислительных моделей.

I.1. Роль вычислительного эксперимента

В научном исследовании численное моделирование становится возможным благодаря быстродействующим компьютерам. Однако сам факт возможности исследования с помощью моделирования не всегда означает, что это наилучший метод. Как и при теоретическом и экспериментальном исследованиях, необходимо выяснить, каковы ограничения и преимущества вычислительного эксперимента. Для того чтобы получить представление о значении моделирования, рассмотрим традиционную картину разви-

тия науки и возможные применения вычислительного эксперимента в этом развитии.

Экспериментальная работа связана в основном с накоплением опытных данных. Теоретическая работа направлена, главным образом, на приведение такой информации в логически последовательную систему для того, чтобы вывести законы описывающие то или иное явление. В своем развитии как теория, так и эксперимент проверяют и обогащают друг друга. В непосредственном воздействии теории на эксперимент можно выделить три момента. Теория ведет к экспериментам с целью:

- определить те факты, которые, согласно математической модели, основанной на некоторой системе принципов, существенны для описания конкретных явлений;
- проверить теоретические предсказания и предположения, и
- определить эмпирические величины, которых требует теория.

Точно также и экспериментальная работа оказывает воздействие на теорию: ее модифицируют в соответствии с экспериментом, и используют для предсказания наиболее существенных опытных данных. Обычная практика науки состоит в сопоставлении теории с опытом. Существенные различия оказываются в центре внимания как теории, так и эксперимента, и их разрешение приводит либо к обобщению существующих теорий, либо к пересмотру основных принципов с целью построения более совершенных теорий.

Потребности технологии послужили дополнительным стимулом перейти к исследованию задач, для которых невозможно построить аналитическое решение, а постановка прямых экспериментов вызывает большие трудности. Чтобы преодолеть возникающие затруднения, широко используются компьютеры как новое средство проведения экспериментов, вычислительных экспериментов, которые ликвидируют разрыв между теорией и опытом.

Вычислительные эксперименты можно грубо подразделить на три категории. К первой относятся эксперименты, предназначенные для моделирования работы сложных устройств с тем, чтобы оценить большое количество вариантов, прежде чем создавать оптимальную модель с применением дорогостоящей технологии. Вторая группа вычислительных экспериментов направлена на по-

лучение информации в ситуациях, когда имеется большой разрыв между возможностями теории и эксперимента. Лабораторные эксперименты сталкиваются со всей сложностью природы: условия могут с трудом поддаваться контролю, измерения не всегда можно легко осуществить, и, как следствие, результаты зачастую трудно интерпретировать однозначно. Например, так обстоит дело при моделировании галактик, землетрясений или субмикронных электронных приборов, когда рассматриваются очень большие или очень малые пространственные и временные масштабы. И наконец, имеется группа вычислительных экспериментов, «теоретические эксперименты», которые дают ценные рекомендации для развития теории.

Объединение вычислительного эксперимента, теории и натурального эксперимента оказывается гораздо более эффективным для получения полезных результатов, чем любой из этих методов по отдельности или сочетание любых двух из них. Недостатки каждого метода исследования компенсируются достоинствами других методов. Роль вычислительного эксперимента определяется его сильными сторонами: возможностью дополнить теоретические исследования, когда математическая модель очень сложна и нелинейна, а также дополнить экспериментальные исследования, когда приборы дороги, данные недоступны для непосредственного измерения или явления очень сложны.

1.2. Постановка вычислительного эксперимента

Отправным пунктом всех вычислительных экспериментов является некоторое физическое явление, и цель этих экспериментов состоит в получении физически полезных результатов. Между этими двумя пунктами можно выделить ряд этапов, показанных на рис. 1.1.

Каждый этап вносит свои ограничения. Как всегда, математическая формулировка представляет собой лишь приближенное описание физического явления. Поэтому ученый-вычислитель должен знать, какие упрощающие предположения сделаны, чтобы определить те случаи, когда справедливы эти уравнения, а следовательно, — и его вычислительная модель.

Более строгие ограничения возникают на этапе перехода к дискретной алгебраической аппроксимации, на котором непрерывные дифференциальные или интегральные уравнения математической модели заменяются алгебраическими аппроксимациями для того, чтобы сделать возможным численное решение на компьютере. На этом этапе возникают вопросы о влиянии конечного временного шага, дискретных пространственных сеток и, в случае моделей частиц, конечного числа частиц. Метод дискретизации зависит от каждой конкретной задачи. Он должен учитывать все основные особенности точного решения математической модели при минимальных вычислительных затратах.



Рис. 1.1. Постановка вычислительного эксперимента

В результате дискретизации возникают алгебраические системы уравнений (линейные или нелинейные), вид которых зависит от способа дискретизации. Хотя объем информации, который можно обработать с помощью компьютеров, велик, он тем не менее ограничен. Поэтому этот фактор должен всегда учитываться при построении вычислительных моделей. В настоящее время существует множество надежных численных алгоритмов



для решения систем уравнений. Во многих случаях можно воспользоваться библиотеками стандартных программ. Необходимо только выбрать соответствующую процедуру с учетом свойств и структуры решаемой системы.

После того, как все вопросы, связанные с построением алгоритма, решены, можно строить «прибор» — программу моделирования. При этом необходимо уделить достаточно внимания созданию правильно функционирующей программы. Качественно разработанная программа должна быть удобочитаемой, несложной в использовании и легко модифицируемой. Она должна иметь модульную структуру и встроенную диагностику и должна собираться только из проверенных программных компонентов. Полная программа должна быть испытана на известных задачах как для проверки алгоритма и кода, так и для определения параметров дискретизации, которые обеспечивают компромисс между качеством численного решения и вычислительными затратами.

Только когда испытания и «калибровка» завершены, «установку» можно считать готовой для проведения вычислительных экспериментов.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным, интегральным или к интегро-дифференциальным уравнениям. В этой главе мы рассмотрим характерные физические процессы, которые приводят к различным крайним задачам для дифференциальных уравнений.

2.1. Распространение малых возмущений и колебания

Многие физические процессы (например, колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) описываются волновым уравнением вида

$$a(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(b(\mathbf{x}) \operatorname{grad}(u)) - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

где неизвестная функция $u(\mathbf{x}, t)$ зависит от n ($n = 1, 2, 3$) пространственных координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t ; коэффициенты $a(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x})$ и $c(\mathbf{x})$ определяются свойствами среды; функция $f(\mathbf{x}, t)$ выражает интенсивность внешнего воздействия. Например, трехмерное волновое уравнение в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

описывает процесс распространения звуковой волны в однородной среде. Этому уравнению удовлетворяют давление газа и потенциал скоростей. Часто задачи на распространение волн удоб-

нее формулировать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Так, вместо предыдущего уравнения, процесс распространения звуковой волны в однородной среде можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \\ \partial p / \partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где p — давление газа; u, v, w — компоненты скорости частиц газа; ρ — плотность газа; c — скорость звука.

2.2. Уравнение теплопроводности (диффузии)

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описывается следующим общим уравнением:

$$a(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(b(\mathbf{x}) \operatorname{grad}(u)) - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

В случае тепловых процессов $u(\mathbf{x}, t)$ обозначает температуру среды в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t ; $a(\mathbf{x})$ есть произведение плотности среды на теплоемкость; $b(\mathbf{x})$ — коэффициент теплопроводности, а $f(\mathbf{x}, t)$ описывает внешние источники тепла. Для процессов диффузии $u(\mathbf{x}, t)$ обозначает плотность частиц в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t ; $a(\mathbf{x})$ — пористость; $b(\mathbf{x})$ — коэффициент диффузии и $c(\mathbf{x})$ характеризует поглощение среды. Например, распространение тепла в однородной среде без источников тепла описывается уравнением

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u,$$

где Δ — оператор Лапласа.

2.3. Уравнения Максвелла

Пусть в некоторой среде имеется переменное электромагнитное поле. Введем обозначения: $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_1, E_2, E_3)$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = (H_1, H_2, H_3)$ — напряжен-

ность магнитного поля; $\rho(\mathbf{x})$ — плотность зарядов; ε — диэлектрическая постоянная среды; μ — магнитная проницаемость среды; $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = (I_1, I_2, I_3)$ — ток проводимости. Тогда эти величины удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= 4\pi\rho(\mathbf{x}), \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0, \\ \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} &= -c \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{E}), \\ \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} &= c \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{H}) - 4\pi \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где c — скорость света в пустоте. Например, если $\rho = 0$, $\varepsilon = \operatorname{const}$, $\mu = \operatorname{const}$ и $\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$ (закон Ома, $\sigma = \operatorname{const}$), то уравнения Максвелла преобразуются в так называемые телеграфные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \Delta \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \Delta \mathbf{H} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

2.4. Уравнение Шредингера

Пусть квантовая частица массы m движется во внешнем силовом поле с потенциалом $U(\mathbf{x})$. Состояние этой частицы описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{x}, t)$, так что $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 \Delta v(\mathbf{x})$ есть вероятность того, что частица будет находиться в окрестности $v(\mathbf{x})$ точки \mathbf{x} в момент времени t ; здесь Δ — объем $v(\mathbf{x})$. Тогда функция $\Psi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\mathbf{x}) \Psi, \quad (2.5)$$

где \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π .

2.5. Уравнения газо-гидродинамики

Рассмотрим движение сжимаемой жидкости (газа), в которой отсутствуют силы вязкости. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартова система координат, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости

движения частиц жидкости, $\rho(\mathbf{x}, t)$ — ее плотность, $p(\mathbf{x}, t)$ — давление, $e(\mathbf{x}, t)$ — внутренняя энергия отнесенная к единице массы. Эти величины удовлетворяют следующей (нелинейной) системе уравнений, называемых уравнениями гидродинамики (газовой динамики) в форме Эйлера:

1) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0,$$

2) уравнение движения

$$\frac{\partial(\rho u_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k u_n + p \delta_{nk}) = 0, \quad n = 1, 2, 3,$$

здесь δ_{nm} — символ Кронекера:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

3) уравнение энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -\frac{p}{\rho} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Для замыкания этой системы уравнений необходимо еще задать уравнение состояния вида $e = e(p, \rho)$. Например, для идеального политропного газа это уравнение имеет вид

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \quad \text{и} \quad p\rho^{-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, а c_p и c_v — удельные теплоемкости среды при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

2.6. Уравнения Навье–Стокса

Рассмотрим теперь движение вязкой жидкости (газа). В рамках введенных в предыдущем пункте обозначений, это движение описывается следующей системой уравнений (уравнения Навье–Стокса):

1) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0,$$

2) уравнение движения

$$\frac{\partial(\rho u_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k u_n + p \delta_{nk} - \sigma_{nk}) = 0,$$

$$\sigma_{nk} = \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right) + \lambda \delta_{nk} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad n = 1, 2, 3,$$

3) уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \sum_{n=1}^3 u_n^2 \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k \left(p + \rho e + \frac{1}{2} \rho \sum_{n=1}^3 u_n^2 \right) - \right. \\ \left. - a \frac{\partial T}{\partial x_k} - \sum_{n=1}^3 u_n \sigma_{nk} \right] = 0,$$

где μ — первый коэффициент вязкости; λ — второй коэффициент вязкости, который имеет отношение к внутренним силам при сжатии (для элементарной модели одноатомного газа $\lambda = -2\mu/3$); a — коэффициент теплопроводности и T — температура. Как и прежде, чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо задать уравнение состояния. Часто предполагается, что жидкость несжимаема, то есть $\rho = \text{const}$. Тогда предыдущие уравнения несколько упрощаются, так как

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

и отпадает необходимость в уравнении энергии.

2.7. Стационарные уравнения

Для стационарных процессов, когда решение не зависит от времени, уравнения колебания (2.1) и диффузии (2.3) принимают вид

$$\text{div}(b(\mathbf{x})\text{grad}(u)) - c(\mathbf{x})u = -f(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

При $b(\mathbf{x}) = \text{const}$ и $c(\mathbf{x}) = 0$ уравнение (2.6) называется уравнением Пуассона

$$\Delta u = -f(\mathbf{x})/b, \quad (2.7)$$

а при $f = 0$ уравнение (2.7) называется уравнением Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Пусть в волновом уравнении (2.2) внешнее возмущение $f(\mathbf{x}, t)$ есть периодическая функция с частотой ω : $f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$. Если искать периодическое возмущение $u(\mathbf{x}, t)$ с той же частотой и неизвестной амплитудой $u_0(\mathbf{x})$: $u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$, то для функции $u_0(\mathbf{x})$ получим стационарное уравнение

$$\Delta u_0 + \frac{\omega^2}{c^2} u_0 = -\frac{f_0(\mathbf{x})}{c^2}, \quad (2.8)$$

называемое уравнением Гельмгольца.

Уравнения Максвелла (2.4), в случае стационарного процесса, превращаются в уравнения электростатики

$$\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad \text{rot}(\mathbf{E}) = 0,$$

и в уравнения магнитостатики

$$\text{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad \text{rot}(\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}.$$

Если энергия E квантовой частицы имеет определенное значение, то такое ее состояние называется стационарным. В этом случае волновая функция $\Psi(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \exp(-iEt/\hbar) \varphi(\mathbf{x}),$$

где волновая функция $\varphi(\mathbf{x})$ в силу (2.5) удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + U(\mathbf{x})\varphi = E\varphi. \quad (2.9)$$

При $U(\mathbf{x}) = 0$ (свободная частица) уравнение (2.9) превращается в однородное уравнение Гельмгольца (2.8).

2.8. Постановка основных задач для уравнений математической физики

В этом параграфе мы рассмотрим математические модели для ряда характерных физических процессов, которые сводятся к

различным краевым задачам для дифференциальных уравнений. Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ — область, где происходит процесс, и S — ее граница, которая представляет собой кусочно-гладкую поверхность. Таким образом, D есть область изменения аргумента \mathbf{x} для стационарных уравнений (область задания). Областью задания для нестационарных уравнений будем считать цилиндр $D \times \{0 \leq t \leq T\}$ высоты T с основанием D .

Для полного описания того или иного физического процесса необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние системы (начальные условия) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (граничные условия). Задача с начальными и граничными условиями называется краевой задачей. Различают три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений:

- 1) задача Коши для нестационарных уравнений: задаются начальные условия, область D совпадает со всем пространством \mathbb{R}^n , граничные условия отсутствуют;
- 2) краевая задача для стационарных уравнений: задаются граничные условия на границе S , начальные условия, естественно, отсутствуют;
- 3) смешанная задача для нестационарных уравнений: задаются и начальные, и граничные условия.

Рассмотрим подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач.

2.8.1. Задача Коши

Для волнового уравнения второго порядка (2.1) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую соответствующему уравнению в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = 0$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = f_1(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Для уравнений диффузии и Шредингера задача Коши ставится так: найти функцию $u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую этим уравнениям в полупространстве $t > 0$ и начальному условию при $t = 0$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Для систем уравнений первого порядка задача Коши формулируется аналогично: найти функцию $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$, удовлетворяющую данной системе в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = 0$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

2.8.2. Краевая задача для стационарных уравнений

Краевая задача для уравнения (2.6) состоит в нахождении функции $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющей в области D уравнению (2.6) и граничному условию вида

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_S = g_0, \quad (2.13)$$

где \mathbf{n} — нормаль к S ; α , β и g_0 — заданные кусочно-непрерывные функции на S , причем $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Часто встречаются следующие типы граничных условий (2.13):

- 1) граничные условия первого рода ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

$$u \Big|_S = g_0,$$

- 2) граничные условия второго рода ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = g_0,$$

- 3) граничные условия третьего рода ($\alpha \geq 0$, $\beta = 1$)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \right) \Big|_S = g_0.$$

Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона с граничными условиями 1-го рода называется задачей Дирихле, а с граничными условиями 2-го рода — задачей Неймана.

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (2.6) и во внешности ограниченной области D (внешние краевые задачи). Отличие состоит в том, что помимо граничного условия (2.13) на S , задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть условия излучения Зоммерфельда при

$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ для уравнений Гельмгольца или Шредингера:

$$u(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial |\mathbf{x}|} - iku = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right).$$

2.8.3. Смешанная краевая задача

Для нестационарных уравнений второго порядка смешанная задача ставится так: найти функцию $u(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую соответствующему уравнению в цилиндре $D \times \{0 \leq t \leq T\}$, начальным условиям (2.10) или (2.11) и граничному условию (2.13). При этом должно быть выполнено условие согласованности

$$\left(\alpha f_0 + \beta \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_S = g_0\Big|_{t=0}.$$

Для систем уравнений первого порядка смешанная задача ставится так: найти функцию $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$, удовлетворяющую данной системе в цилиндре $D \times \{0 \leq t \leq T\}$, начальным условиям (2.12) и граничному условию

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right)\Big|_S = g_0,$$

где α_k и g_0 — заданные кусочно-непрерывные функции на S , причем $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k > 0$.