

**В. Е. ЗАЛИЗНЯК**

## **ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ**

**Часть 1. Введение в конечно-разностные методы**

**Краткое описание прилагаемых программ.**

Это приложение содержит краткое описание прилагаемых программ, которые могут быть использованы как для практических занятий, так и при выполнении курсовых и дипломных проектов. Дополнительную информацию об использовании программ можно найти в примерах. Хотя автор приложил все усилия для того, чтобы программы работали без ошибок, ни автор ни издатель не несут никакой ответственности за последствия применения этих программ.

Ниже приводится список прилагаемых программ и краткое описание основных функций.

Основная функция	Примеры и вспомогательные функции
<a href="#">heat_1d_un</a>	example4_1, f1_e41, f2_e41, fs_e41
<a href="#">heat_1d_nun</a>	example4_2, f1_e42, f2_e42, fs_e42
<a href="#">heat_2d_es</a>	example4_3, g1_e43, g2_e43, g3_e43, g4_e43, fs_e43
<a href="#">stefan_1d</a>	example4_4, f1_e44, f2_e44, fs_e44
<a href="#">properties</a>	
<a href="#">cross</a>	example5_1, f1_e51, f2_e51
<a href="#">lw_acoustics</a>	example5_2, f1_e51, f2_e51
<a href="#">roe</a>	example5_3, f1_e51, f2_e51
<a href="#">godunov_acoustics</a>	example5_4, f1_e51, f2_e51
<a href="#">pem</a>	example5_5, f1_e51, f2_e51
<a href="#">lw_gasdynamics</a>	example6_1, example6_2
<a href="#">godunov_gasdynamics</a>	example6_3
<a href="#">waf_gasdynamics</a>	example6_4
<a href="#">waf_tvd_gasdynamics</a>	example6_5, limiter_mina, limiter_supera, limiter_ultraa, limiter_vanAlbada, limiter_vanLeer, limiter_Lin
<a href="#">riemann</a>	
<a href="#">helmgotz_2d_sor</a>	example7_1, g1_e71, g2_e71, g3_e71, g4_e71, a_e71, b_e71, f_e71
<a href="#">helmgotz_2d_fft</a>	example7_2, g1_e71, g2_e71, g3_e71, g4_e71, f_e71
<a href="#">helmgotz_2d_cg</a>	example7_3, g1_e73, g2_e73, g3_e73, g4_e73, a_e73, b_e73, f_e73
<a href="#">poisson_2d_td</a>	example7_4, g1_e74, g2_e74, g3_e74, g4_e74, a_e74, f_e74
<a href="#">ns_2d_vsf</a>	example8_1, g1_e81, g2_e81, g3_e81, g4_e81

```
function [uu]=heat_1d_un(ud,kappa,a,nx,h,time,tau,b,gamma,
    bl,br,fbl,fbr,fs)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме (4.3)
Входные параметры	ud	Температура в момент времени $t_k$
	kappa	Коэффициент температуропроводности ( $\kappa$ )
	a	Коэффициент теплопроводности
	nx	Число сеточных узлов
	h	Шаг по пространству
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	tau	Шаг по времени
	b	Параметр $\kappa\tau/h^2$
	gamma	Параметр $\gamma$ = 0 – явная схема > 0 – неявная схема
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие первого рода = 1 – граничное условие второго рода
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость температуры или теплового потока от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
	fs	Имя m-файла в котором задаётся функция внешнего источника тепла в зависимости от координаты и времени.
Выходные параметры	uu	Температура в момент времени $t_{k+1}$

```
function [uu]=heat_1d_nun(ud,roc,a,nx,h,time,tau,b,gamma,
                        bl,br,fbl,fbr,fs)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме (4.16)
Входные параметры	ud	Температура в момент времени $t_k$
	roc	Массив значений $\rho c$ в узлах основной разностной сетки
	a	Массив значений коэффициента теплопроводности в узлах вспомогательной сетки
	nx	Число сеточных узлов
	h	Шаг по пространству
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	tau	Шаг по времени
	gamma	Параметр $\gamma$ = 0 – явная схема > 0 – неявная схема
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие первого рода = 1 – граничное условие второго рода
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость температуры или теплового потока от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
	fs	Имя m-файла в котором задаётся функция внешнего источника тепла в зависимости от координаты и времени.
Выходные параметры	uu	Температура в момент времени $t_{k+1}$
Примечание		Функция может быть использована для решения нелинейного уравнения (схема (4.18)). При этом необходимо только на каждом шаге по времени пересчитывать значения $\rho c$ , $a$ и $\tau$ .

```
function [uu]=heat_2d_es(ud,kappa,a,nx,ny,hx,hy,tau,time,
                        bxl,bxr,fbxl,fbxr,byl,byr,fbyl,fbyr,fs)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме (4.27)
Входные параметры	ud	Температура в момент времени $t_k$
	kappa	Коэффициент температуропроводности ( $\kappa$ )
	a	Коэффициент теплопроводности
	nx, ny	Число сеточных узлов по $x$ и $y$ , соответственно
	hx, hy	Шаги по пространству по $x$ и $y$ , соответственно
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	tau	Шаг по времени
	bxl, bxr	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно. = 0 – граничное условие первого рода = 1 – граничное условие второго рода
	fbxl, fbxr	Имена $m$ -файлов в которых задаётся зависимость температуры или теплового потока от $y$ и времени при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно.
	byl, byr	Тип граничного условия при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно. = 0 – граничное условие первого рода = 1 – граничное условие второго рода
	fbyl, fbyr	Имена $m$ -файлов в которых задаётся зависимость температуры или теплового потока от $x$ и времени при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно.
	fs	Имя $m$ -файла в котором задаётся функция внешнего источника тепла в зависимости от $x$ , $y$ и времени.
Выходные параметры	uu	Температура в момент времени $t_{k+1}$

```
function [entu,uu,sf]=stefan_1d(entd,ud,ro,cs,cl,as,al,lh,up,nx,h,
    tau,time,bl,br,fbl,fbr,fs)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме (4.38)
Входные параметры	ud, entd	Температура и энтальпия в момент времени $t_k$
	ro	Плотность среды
	cs, cl	Теплоёмкость твёрдой и жидкой фазы, соответственно.
	as, al	Коэффициент теплопроводности твёрдой и жидкой фазы, соответственно.
	lh	Скрытая теплота плавления
	up	Температура плавления
	nx	Число сеточных узлов
	h	Шаг по пространству
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	tau	Шаг по времени
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие первого рода = 1 – граничное условие второго рода
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость температуры или теплового потока от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
	fs	Имя m-файла в котором задаётся функция внешнего источника тепла в зависимости от координаты и времени.
Выходные параметры	uu, entu	Температура и энтальпия в момент времени $t_{k+1}$
	sf	Локальная доля твёрдой фазы в момент времени $t_{k+1}$

`function [dis,cg]=properties(kh,r,method)`

Назначение		Вычисление коэффициента затухания и безразмерной групповой скорости сеточного решения вида (5.3) для различных схем
Входные параметры	kh r method	Волновое число умноженное на шаг по пространству Параметр Куранта Метод решения 'crs' – схема «крест» 'lxw' – схема Лакса-Вендроффа 'roe' – схема Ф. Роу 'god' – схема С. К. Годунова 'pem' – схема РЕМ
Выходные параметры	dis cg	Коэффициент затухания Безразмерная групповая скорость

`function [uu]=cross(ud,um,c,ro,nx,h,time,tau,bl,br,fbl,fbr)`

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме (5.2)
Входные параметры	ud, um c ro nx h time tau bl, br  fbl, fbr	Решение в момент времени $t_{k-1}$ и $t_k$ , соответственно. Скорость распространения волны Плотность среды Число сеточных узлов Шаг по пространству Момент времени $t_{k+1}$ Шаг по времени Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие первого рода = 1 – граничное условие второго рода Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения или производной решения от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
Выходные параметры	uu	Решение в момент времени $t_{k+1}$

function [uu,pu]=lw\_acoustics(ud,pd,imp,nx,time,r,bl,br,fbl,fbr)

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме Лакса-Вендроффа (5.6)
Входные параметры	ud, pd	Скорость и давление в момент времени $t_k$
	imp	Значение $\rho c$
	nx	Число сеточных узлов
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	r	Параметр Куранта
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие на $u$ = 1 – граничное условие на $p$
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость скорости или давления от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
Выходные параметры	uu, pu	Скорость и давление в момент времени $t_{k+1}$



```
function [uu,pu]=roe(ud,pd,um,pm,imp,nx,time,r,bl,br,fbl,fbr)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме Ф. Роу (5.12)
Входные параметры	ud, pd	Скорость и давление в момент времени $t_{k-1}$
	um, pm	Скорость и давление в момент времени $t_k$
	imp	Значение $\rho c$
	nx	Число сеточных узлов
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	r	Параметр Куранта
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие на $u$ = 1 – граничное условие на $p$
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость скорости или давления от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
Выходные параметры	uu, pu	Скорость и давление в момент времени $t_{k+1}$

```
function [uu,pu]=godunov_acoustics(ud,pd,imp,nx,time,r,bl,br,fbl,fbr)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме С. К. Годунова (5.16)
Входные параметры	ud, pd	Скорость и давление в момент времени $t_k$
	imp	Значение $\rho c$
	nx	Число сеточных узлов
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	r	Параметр Куранта
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие на $u$ = 1 – граничное условие на $p$
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость скорости или давления от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
Выходные параметры	uu, pu	Скорость и давление в момент времени $t_{k+1}$

```
function [ub,pb,uu,pu]=pem(ua,pa,ud,pd,imp,nx,r,time,tau,
    a1,a2,a3,b1,b2,b3,bl,br,fbl,fbr)
```

Назначение		Вычисление одного шага по времени по схеме PEM (5.22)
Входные параметры	ua, pa	Средние на разностном интервале скорость и давление в момент времени $t_k$
	ud, pd	Скорость и давление в узлах разностной сетки в момент времени $t_k$
	imp	Значение $\rho c$
	nx	Число сеточных узлов
	r	Параметр Куранта
	time	Момент времени $t_{k+1}$
	tau	Шаг по времени
	a1, a2, a3, b1, b2, b3	Параметры схемы PEM (приведены в Приложении А)
	bl, br	Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – граничное условие на $u$ = 1 – граничное условие на $p$
	fbl, fbr	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость скорости или давления от времени при $x=0$ и $x=l$ , соответственно.
Выходные параметры	ub, pb	Средние на разностном интервале скорость и давление в момент времени $t_{k+1}$
	uu, pu	Скорость и давление в узлах разностной сетки в момент времени $t_{k+1}$

```
function [rf,uf,pf]=riemann(x,t,r1,u1,p1,r2,u2,p2,gamma)
```

Назначение		Вычисление точного решения задачи о распаде разрыва для идеального газа
Входные параметры	x t r1, u1, p1 r2, u2, p2 gamma	Координата Время Начальные значения плотности, скорости и давления при $x < 0$ Начальные значения плотности, скорости и давления при $x > 0$ Показатель адиабаты
Выходные параметры	rf, uf, pf	Значение плотности, скорости и давления в точке $x$ в момент времени $t$

```
function [d,u,p,e,time]=lw_gasdynamics(dd,ud,pd,h,nx,r,cad,tp,
                                         gamma,bcl,bcr)
```

Назначение		Расчёт одномерного течения идеального газа по схеме Лакса-Вендроффа (6.3)
Входные параметры	dd, ud, pd h nx r cad tp gamma bcl, bcr	Распределение плотности, скорости и давления в момент времени $t=0$ Шаг по пространству Число сеточных узлов Параметр Куранта Коэффициент искусственной вязкости Длительность процесса (приближённая) Показатель адиабаты Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – жёсткая стенка = 1 – открытая граница
Выходные параметры	time d, u, p, e	Реальная длительность процесса Распределение плотности, скорости, давления и внутренней энергии в момент времени $time$

```
function [d,u,p,e,time]=godunov_gasdynamics(dd,ud,pd,h,nx,r,tp,
                                             gamma,bcl,bcr)
```

Назначение		Расчёт одномерного течения идеального газа по схеме С. К. Годунова (6.10)
Входные параметры	dd, ud, pd h nx r tp  gamma bcl, bcr	Распределение плотности, скорости и давления в момент времени $t=0$ Шаг по пространству Число сеточных узлов Параметр Куранта Длительность процесса (приближённая) Показатель адиабаты Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – жёсткая стенка = 1 – открытая граница
Выходные параметры	time d, u, p, e	Реальная длительность процесса Распределение плотности, скорости, давления и внутренней энергии в момент времени $time$

```
function [d,u,p,e,time]=waf_gasdynamics(dd,ud,pd,h,nx,r,cad,tp,
                                          gamma,bcl,bcr)
```

Назначение	Расчёт одномерного течения идеального газа по схеме метода WAF (6.12).
------------	--

Параметры имеют тот же смысл, что и для функции `lw_gasdynamics`.

```
function [d,u,p,e,time]=waf_tvd_gasdynamics(dd,ud,pd,h,nx,r,tp,
                                             gamma,bcl,bcr,limiter)
```

Назначение		Расчёт одномерного течения идеального газа по TVD версии схемы метода WAF.
Входные параметры	dd, ud, pd h nx r tp  gamma bcl, bcr  limiter	Распределение плотности, скорости и давления в момент времени $t=0$ Шаг по пространству Число сеточных узлов Параметр Куранта Длительность процесса (приближённая) Показатель адиабаты Тип граничного условия при $x=0$ и $x=l$ , соответственно. = 0 – жёсткая стенка = 1 – открытая граница Имя m-файла в котором задаётся функция-ограничитель. Приведённые в книге ограничители прилагаются.
Выходные параметры	time d, u, p, e	Реальная длительность процесса Распределение плотности, скорости, давления и внутренней энергии в момент времени $time$

```
function [u,k]=helmgoltz_2d_sor(f,ac,bc,lx,ly,nx,ny,g1,g2,g3,g4)
```

Назначение		Решение уравнения (7.9) с граничными условиями Дирихле. Метод SOR.
Входные параметры	f	Имя m-файла в котором задаётся функция правой части $f(x, y)$
	ac	Имя m-файла в котором задаётся коэффициент $a(x, y)$
	bc	Имя m-файла в котором задаётся коэффициент $b(x, y)$
	lx, ly	Размер области по x и y, соответственно
	nx, ny	Число сеточных узлов по x и y, соответственно
	g1, g3	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от y при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно.
	g2, g4	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от x при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно.
Выходные параметры	u	Решение в узлах разностной сетки
	k	Число итераций
Примечание		Итерационный процесс завершается когда, либо относительная ошибка приближённого решения становится меньше чем $10^{-5}$ , либо число итераций достигает значения $3 \cdot \max(nx, ny)$ .

function [u]=helmgoltz\_2d\_fft(f,a,b,lx,ly,nx,ny,g1,g2,g3,g4)

Назначение		Решение уравнения (7.9) с постоянными коэффициентами и граничными условиями Дирихле. Метод на основе FFT.
Входные параметры	f	Имя m-файла в котором задаётся функция правой части $f(x, y)$
	a	Значение коэффициента a
	b	Значение коэффициента b
	lx, ly	Размер области по x и y, соответственно
	nx, ny	Число сеточных узлов по x и y, соответственно
	g1, g3	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от y при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно.
	g2, g4	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от x при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно.
Выходные параметры	u	Решение в узлах разностной сетки
Примечание		FFT применяется по координате x, поэтому для эффективного решения следует задавать $n_x=2^p+1$ .



function [u,it]=helmgoltz\_2d\_cg(up,f,a,b,lx,ly,nx,ny,g1,g2,g3,g4)

Назначение		Решение уравнения (7.9) с граничными условиями Дирихле. Метод Конкуса и Голуба на основе FFT.
Входные параметры	up f a b lx, ly nx, ny g1, g3 g2, g4	Начальное приближение Имя m-файла в котором задаётся функция правой части $f(x, y)$ Имя m-файла в котором задаётся коэффициент $a(x, y)$ Имя m-файла в котором задаётся коэффициент $b(x, y)$ Размер области по $x$ и $y$ , соответственно Число сеточных узлов по $x$ и $y$ , соответственно Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от $y$ при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно. Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от $x$ при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно.
Выходные параметры	u it	Решение в узлах разностной сетки Число итераций
Примечание		Итерационный процесс завершается когда относительная ошибка приближённого решения становится меньше чем $10^{-5}$ . FFT применяется по координате $x$ , поэтому для эффективного решения следует задавать $n_x=2^p+1$ .

```
function [u,k]=poisson_2d_td(up,f,a,lx,ly,nx,ny,g1,g2,g3,g4)
```

Назначение		Решение двумерного нелинейного уравнение (7.2) с граничными условиями Дирихле методом установления.
Входные параметры	up f a lx, ly nx, ny g1, g3 g2, g4	Начальное приближение Имя m-файла в котором задаётся функция правой части $f(x, y)$ Имя m-файла в котором задаётся коэффициент $a(u, x, y)$ Размер области по $x$ и $y$ , соответственно Число сеточных узлов по $x$ и $y$ , соответственно Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от $y$ при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно. Имена m-файлов в которых задаётся зависимость решения от $x$ при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно.
Выходные параметры	u k	Решение в узлах разностной сетки Число итераций
Примечание		Процесс установления завершается когда относительная ошибка приближённого решения становится меньше чем $10^{-5}$ .

```
function [u,v,w,psi,time]=ns_2d_vsf(u,v,w,Re,tp,lx,ly,nx,ny,
                                     bxl,bxr,byl,byr,g1,g2,g3,g4)
```

Назначение		Решение двумерного уравнения Навье-Стокса в переменных функция тока-завихрённость.
Входные параметры	u, v, w	Значение компонент скорости и завихрённости в момент времени $t=0$ .
	Re	Число Рейнольдса
	tp	Длительность процесса (приближённая)
	lx, ly	Размер области по x и y, соответственно
	nx, ny	Число сеточных узлов по x и y, соответственно
	bxl, bxr	Тип граничного условия на v при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно. =0 – задаётся значение скорости =1 – условие свободного проскальзывания
	byl, byr	Тип граничного условия на u при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно. =0 – задаётся значение скорости =1 – условие свободного проскальзывания
	g1, g3	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость v от y и времени при $x=0$ и $x=l_x$ , соответственно.
	g2, g4	Имена m-файлов в которых задаётся зависимость u от x и времени при $y=0$ и $y=l_y$ , соответственно.
Выходные параметры	time	Реальная длительность процесса
	u, v, w	Значение компонент скорости и завихрённости в момент времени time.
	psi	Функция тока в момент времени time.
Примечание		Для нормальных к границе компонент скорости приняты следующие граничные условия: $u=0$ при $x=0$ и $x=l_x$ , $v=0$ при $y=0$ и $y=l_y$