МИР
программирования

М.Ф. Гарифуллин

Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2020

УДК 519.682
ББК 32.97
Г20

Рецензент: *профессор, доктор технических наук О.А. Кузнецов*

Г20 Гарифуллин М.Ф.
Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений. — М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. — 192 с. Табл. 12. Ил. 46. Библиогр.: 66 назв.
ISBN 978-5-94836-597-8

Рассмотрены вопросы интегрирования по времени дифференциальных уравнений, используемых при моделировании нестационарных явлений. Приведены численные методы, которые нашли применение при решении различных научных и технических задач, исследованиях технологических процессов. Представлены различные варианты численных методов прямого интегрирования уравнений первого и второго порядков шагами по времени (явные и неявные, одношаговые и многошаговые). Приведены тексты реализующих программ с подробными комментариями. На простых примерах продемонстрированы возможности и свойства методов. Уделено внимание вопросам тестирования программ и выбора рационального метода интегрирования, удовлетворяющего требованиям по точности и устойчивости вычислений.

Предназначено для специалистов, занятых решением нестационарных задач, а также преподавателей, студентов и аспирантов технических вузов.

УДК 519.682
ББК 32.97

ISBN 978-5-94836-597-8

Содержание

Введение

Численные методы решения нестационарных задач широко используются в различных областях науки и техники [1, 4, 13, 15, 16, 17, 23 и др.]. Они востребованы в транспорте и медицине, геологии и биологии, химии и физике и др. Хотя многие варианты численных методов разработаны еще в прошлом веке, вопросы их развития и практического использования по-прежнему остаются актуальными.

В историческом плане можно отметить следующее. До первой половины XX века применение процедур численного интегрирования дифференциальных уравнений по времени с начальными условиями (задача Коши) было весьма ограниченным по объективным причинам: отсутствовала требуемая вычислительная техника, а ручной счет не позволял решать сколь-либо трудоемкие задачи. Внедрение механических и электромеханических арифмометров стало первым шагом на пути практического использования численных методов. Появление цифровых электронных вычислительных машин (ЭВМ), вначале ламповых, затем транзисторных, изменило ситуацию. Несмотря на весьма скромные по современным меркам возможности, эти ЭВМ обеспечили решение множества практически важных задач, создали основу для развития и более широкого внедрения численных методов. Ограниченные ресурсы ЭВМ тех лет привели к развитию алгоритмов, не требующих хранения больших объемов данных, формирования и обработки больших систем уравнений и больших вычислительных затрат. Распространение получили методы, основанные на рассмотрении нестационарных явлений в частотной области в линейном приближении, применении приемов редуцирования систем уравнений, использования разложения решения по собственным формам и частотам колебаний. При этом продолжались работы и по совершенствованию альтернативных вариантов — существенно более затратных в вычислительном плане прямых методов решения непосредственно во временной области шагами по времени, хотя они имели ограниченное применение ввиду недостаточной производительности ЭВМ для решения сложных задач механики жидкости и газа, механики деформируемого твердого тела и др.

Решение во временной области имеет ряд преимуществ. Оно позволяет проводить численные исследования нестационарных процессов различной природы. Отсутствие жестких ограничений, связанных с применением гипотезы гармоничности колебаний и применением принципа суперпозиции, создает возможности для более точного и подробного моделирования сложных явлений с учетом влияния разнообразных факторов. При этом сравнительно просто осуществляется решение в нелинейной постановке. Универсальность и удобство анализа результатов делают эти методы привлекательными при рассмотрении многопараметрических задач. В частности, однотипными методами могут быть решены задачи механики движения систем твердых тел, нестационарного нагружения конструкций и механизмов с учетом податливости их элементов, задачи динамики процессов регулирования сложных объектов средствами автоматического управления, моделирования разнообразных течений, технологических процессов, процессов горения, полимеризации, релаксации напряжений и др.

Основным ограничением пошаговых процедур решения непосредственно во временной области (методов прямого интегрирования) является большая трудоемкость моделирования нестационарных процессов на длительных интервалах времени с большим количеством выполняемых шагов по времени. Имеются сложности в обеспечении точности и устойчивости вычислений в случаях рассмотрения процессов нагружения конструкций с низким уровнем собственного демпфирования, исследования поведения систем вблизи границ их устойчивости. Следует заметить, что перечисленные трудности сравнительно легко могут быть преодолены в случае использования способов решения в частотной области. У каждого подхода имеются свои преимущества и свои недостатки [16].

Развитие вычислительной техники, повышение скорости обработки информации, увеличение объемов располагаемой памяти ЭВМ позволили реализовать преимущества пошаговых методов моделирования разнообразных переходных процессов. Этим в основном и обусловлен прогресс в развитии численных методов прямого интегрирования во временной области. Внедрение многопроцессорных ЭВМ, параллельных вычислений также способствовало дальнейшему распространению этих подходов.

Вопросы численного интегрирования решения по времени рассмотрены во многих публикациях. Некоторые из них представлены в списке литературы [1, 4, 13 и др.]. Практически в каждой книге по численным методам обсуждаются методы Эйлера, Рунге — Кутты и др. Но складывается парадоксальная ситуация. Развитие ЭВМ и программного обеспечения (ПО) открыло широкие возможности для создания и совершенствования приемов моделирования разнообразных нестационарных явлений. Программисты прошлых поколений о таких ресурсах даже и мечтать не могли. Но, вопреки ожиданиям, не все эти возможности удалось реализовать. Достигнутые успехи в развитии ПО привели к тому, что количество программ собственной разработки в последние годы многократно сократилось. Их потеснили универсальные, многофункциональные и хорошо оформленные коммерческие комплексы программ. Большой объем знаний о численных методах, полученный в прошлые десятилетия и опубликованный во множестве книг и статей, оказался не востребован современными пользователями коммерческих программ. Обеспечение подробной справочной информацией, системами подсказок, внедрение диалоговых режимов, расширение графических средств обработки входных и выходных данных изменили требования к квалификации типичного пользователя коммерческого ПО. Он, в отличие от расчетчиков прошлых лет, сам не выводил формулы, не изучал численные методы, не писал реализующие программы, не проводил их отладку и тестирование. Все это осталось в прошлом. В лучшем случае он приобрел опыт применения готовых модулей из MATLAB, IMSL и т.п. Пользователю коммерческой программы теперь не требуются глубокие знания для выполнения расчетов. Достаточно иметь навыки работы в настройках программы, в меню, в системе подсказок. При проведении расчетов внимание уделяется лишь вопросам правильного задания формата исходных данных в соответствии с инструкцией. Другие вопросы, в том числе особенности поставленной задачи, свойства решаемых уравнений, возможности численного метода и ПО, отодвинуты на второй план. У многих сформировалась твердая уверенность, что купленные программы всегда дают правильные результаты.

Часто пользователь даже не представляет, каким образом работает программа и как получено решение. Это его не интересует. Считается, что «не нужно забивать голову лишними знаниями». Более того, формируется мнение, что в современном мире знания человеку и не требуются. На все вопросы можно в течение секунды получить ответ, просто заглянув в экран телефона или компьютера. Добытая таким образом информация не обсуждается и не анализируется. Кто дал ответ? Кто гарантирует его правильность? Имеет ли он вообще какое-то отношение к заданному вопросу?

Разработчики коммерческих программ не могут заранее предугадать все особенности конкретной задачи. Создавая инструкции, они ориентируются на типовые задачи и на среднестатистического потребителя своих услуг с определенным уровнем подготовки. Если задача сложна, а подготовка недостаточна, то могут возникать непрогнозируемые ситуации: выбираются неверные настройки программ, неверные расчетные соотношения для моделирования рассматриваемых явлений, не уделяется должное внимание сходимости и устойчивости решения, в том числе при проведении длительных и сложных расчетов. При этом затрачиваются большие ресурсы времени и средств. Может оказаться, что численное решение получено, но оно не соответствует действительности, а пользователь программы даже не догадывается о наличии ошибок в расчетах и необходимости их устранения. Все это усугубляется наличием «эффективных менеджеров» с гуманитарным образованием, которые принимают подобную работу.

Принято с ностальгией вспоминать прошлые времена. Но воспоминания о порванных перфолентах, замятых перфокартах, о сбоях дисководов и лентопротяжных механизмов, «зависаниях» и перегреве ЭВМ, грохочущих АЦПУ и рулонах распечаток вызывают негативные эмоции. Другое дело — люди. Программисты первого поколения писали программы в машинных кодах. Они понимали задачу, знали численные методы, знали особенности работы ЭВМ. По лампочкам индикаторов на панели ЭВМ могли определить место выполнения или «зависания» программы. При написании программ экономились каждый байт, каждая операция, активно использовалась внешняя память на дисках, барабанах и лентах. Программисты второго поколения использовали языки высокого уровня. Им уже не требовались знания о регистрах, ячейках памяти и т.п. Они понимали задачу, численные методы и помнили об ограничениях ЭВМ. Третье поколение не склонно писать собственные программы. Программированием они называют процесс сборки программ из готовых модулей. Как работают эти модули, что они собой представляют, их не интересует. О решаемой задаче помнят, о располагаемых ресурсах ЭВМ иногда вспоминают, хотя об этом особо и не заботятся. Внешнюю память используют лишь для хранения данных и результатов расчета. Теперь проще купить новый, более мощный компьютер, чем дорабатывать и оптимизировать старую программу. Следующее поколение ориентировано на «искусственный интеллект». О поставленной задаче еще помнят. Как работает ЭВМ, как получено решение — не представляют. Если результаты чему-то соответствуют, то радуются успехам. Если ничему не соответствуют, то говорят: «Сами удивляемся! Машина так сосчитала». Определить причину появления странного результата удается не всегда. Такое развитие событий не вызывает оптимизма.

Чуть более полувека потребовалось для того, чтобы совершился переход от единичных и очень дорогих экземпляров громоздких, потребляющих сотни киловатт электроэнергии, весьма ненадежных ЭВМ, способных выполнять всего лишь сотни операций в секунду и требующих большого количества обслуживающего персонала, к современным ЭВМ, которые годами могут работать без единого сбоя и всякого обслуживания. Они занимают мало места, имеют малое энергопотребление, выпускаются в огромных количествах. Их стоимость на много порядков ниже, а вычислительные возможности (скорость выполнения операций и ресурсы памяти) на много порядков выше, чем у ЭВМ прошлых поколений. Все это способствовало повсеместному внедрению вычислительной техники и компьютерных технологий в самые различные сферы деятельности.

Но количество не везде перешло в качество. Массовое использование вычислительной техники не привело к столь же впечатляющим успехам в решении технических и научных задач. В частности, внедрение компьютерных технологий не сопровождается радикальным улучшением характеристик летательных аппаратов или снижением сроков и стоимости их проектирования. Одной из причин тому является потеря былого интереса к традиционным численным методам. Многие специалисты переключились на решение совсем других задач: разработку компьютерных игр, сетевых приложений, приложений для телефонов, систем распознавания, систем мобильной связи, банковских приложений, программ для робототехнических устройств, «умных домов» и т.п. Решение этих задач требует совсем других подходов, алгоритмов и технологий. Разработчики компьютерных игр не сильно озабочены выполнением законов физики в создаваемых ими виртуальных мирах. Технические специалисты, напротив, обязаны обеспечить высокую точность моделирования реальных процессов. Поэтому научные и прикладные исследования не могут обходиться без традиционных численных методов, которые изначально ориентированы на обеспечение точности и надежности результатов.

В течение короткого времени произошли большие изменения, которых мало кто мог предугадать. В частности, результатом развития индустрии развлечений стало появление игроманов, сете- и телефонозависимых людей; результатом внедрения компьютерных систем управления стали аварии и катастрофы, вызванные неверной работой программ при полной исправности самолета, корабля или автомобиля. Компьютерные вирусы нарушают работу банков, заводов и электростанций с нанесением огромного материального ущерба. Насколько полезны или вредны подобные новшества, оправданы ли новые риски — это большой вопрос.

Развитие компьютерных технологий продолжается. Программное обеспечение адаптируется к новым реалиям. Приемы последовательного «наращивания» старых версий программ позволяют сравнительно просто создавать многофункциональные и весьма сложные программы. Однако существуют ограничения, связанные с особенностями базовых версий программ. Поэтому важно периодически возвращаться к теоретическим основам, проводить ревизию используемых алгоритмов, оценивать эффективность работы всех участков программ, вносить необходимые изменения, чтобы модернизируемое ПО могло соответствовать новым требованиям.

В книге сделана попытка вернуть интерес читателя к традиционным численным методам, в частности методам моделирования нестационарных явлений. Эти методы были и остаются актуальными и имеют большое практическое значение. Они служат основой для создания ПО, предназначенного для выполнения расчетов и проектирования кораблей, самолетов, космических аппаратов и других всевозможных конструкций и механизмов.

В одной публикации невозможно охватить все стороны поднятой темы. Такая задача не ставится. В книге обсуждаются вопросы интегрирования по времени уравнений, описывающих нестационарные процессы. Проблемы, связанные с выбором теоретических соотношений, формирования самих уравнений, решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и т.п., не рассматриваются. Они обсуждаются в отдельных, специализированных публикациях. Некоторые из них приведены в списке литературы. В книге представлены наиболее востребованные варианты численных методов интегрирования уравнений первого и второго порядков, показаны примеры реализующих программ, примеры тестирования этих программ. С целью обеспечения удобства чтения материал изложен в простой и доступной форме. Это не только позволяет получить общие представления о свойствах численных методов решения дифференциальных уравнений, но и дает возможность читателю разного уровня подготовки самому разобраться в особенностях их применения, осознанно сделать выбор метода, соответствующего решаемой задаче, самостоятельно написать реализующую программу, провести ее тестирование, получить собственный опыт решения нестационарных задач. Этот материал может представлять интерес как для разработчиков численных методов, так и для обычных пользователей коммерческих программ и студентов технических вузов. В конце книги приведен краткий список публикаций, в которых представлена дополнительная информация по затрагиваемым вопросам.

ГЛАВА 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Особенности применения численных методов

В книге рассматривается группа численных методов, основанных на последовательном, пошаговом моделировании нестационарных явлений во временной области. Такие численные методы (методы прямого интегрирования) не требуют выполнения предварительных преобразований исходных уравнений, описывающих динамику процесса. В отличие от численных методов решения в частотной области, они обладают существенно более широкими возможностями моделирования рассматриваемых нестационарных явлений, с подробным учетом всевозможных деталей и различного рода особенностей. Это обусловлено применением локальных функций для аппроксимации законов изменений параметров задачи в малой окрестности решения на каждом шаге по времени. Но помимо преимуществ, имеются и определенные ограничения.

При численной реализации пошаговых методов моделирования нестационарных процессов следует учитывать ряд факторов, влияющих на точность, сходимость и устойчивость решения.

Выбор величины шага по времени

Методы решения нестационарных задач во временной области предполагают рассмотрение процессов в последовательные моменты времени с использованием сравнительно небольших шагов по времени $\Delta\tau$. Считается, что искомые параметры плавно меняются в пределах этого шага.

Это позволяет принимать простые законы их изменения в малой окрестности решения. Обычно используются локальные полиномы невысокого порядка. Существуют способы, в которых время является дополнительным измерением (четвертым, если решается трехмерная задача). Ввиду высоких требований к ресурсам ЭВМ, связанных с необходимостью решения задач очень большой размерности и наличием ряда других ограничений, такие подходы не получили большого распространения. Более успешными и экономичными оказались подходы, в которых решение последовательно формируется от предыдущего шага по времени к последующему. В начале расчета на первом шаге по времени используются задаваемые начальные условия. Если решение имеет разрывы, то оно рассматривается по отдельным гладким участкам, состыкованным между собой с учетом величин разрывов. В другом варианте разрыв моделируется коротким гладким участком с использованием дополнительного демпфирования решения и уменьшенного шага по времени.

Рассматриваемые методы имеют ограничения на величину шага по времени $\Delta\tau$. Эти ограничения связаны как с физикой моделируемого процесса, так и с требованиями обеспечения устойчивости применяемых вычислительных процедур.

Ограничения, связанные с характерным временем моделируемого процесса

При рассмотрении переходных режимов нагружения величина шага по времени $\Delta\tau$ ограничена характерным временем моделируемого процесса T:

$$\Delta\tau_{max} \leqslant (0.1 \div 0.05)T. \qquad (1)$$

Эта оценка обусловлена использованием конечно-разностных аппроксимаций при численном решении задач. В этом случае реальные зависимости изменения параметров по времени заменяются отрезками парабол невысокого порядка. При увеличении шага $\Delta\tau$ точность такой аппроксимации падает, получаемое решение искажается. При излишне большом шаге $\Delta\tau$ результаты вычислений перестают соответствовать действительности. Если сами параметры задачи (инерционные, жесткостные коэффициенты и др.) изменяются по времени, то чаще всего требуется дополнительное уменьшение величины шага $\Delta\tau$ для обеспечения желаемой точности решения.

Величина характерного времени процесса T в большинстве случаев определяется исходя из заданных условий решаемой задачи. Это может быть длительность воздействия возмущающей нагрузки, длительность ее изменения по времени, по направлению, месту приложения; длительность периода колебаний упругой конструкции высшего учитываемого тона и т.п. При этом характерное время T предварительно оценивается по приближенным зависимостям. Если выбирать достаточно малое значение величины шага по времени $\Delta\tau = 0.05\Delta\tau_{max}$ и менее, погрешности, связанные с неточностями в определении характерного времени T, мало влияют на получаемые результаты. При необходимости можно повторить расчет с уменьшенным (обычно вдвое) шагом по времени с целью проверки устойчивости и точности вычислений. В случае значительного расхождения полученных результатов шаг $\Delta\tau$ вновь уменьшается, и проводятся повторные вычисления. При этом предполагается, что с уменьшением шага $\Delta\tau$ результаты численного расчета сходятся к точному решению. Эти рассуждения связаны с повышением точности аппроксимации полиномами гладкой функции при уменьшении шага $\Delta\tau$. Заметим, что подобные теоретические оценки не учитывают наличие погрешностей округления, которые могут оказаться значительными при выборе слишком малого шага $\Delta\tau$, в случаях использования аппроксимирующих полиномов высокого порядка, при решении систем уравнений с большим количеством неизвестных и т.п. Нередки ситуации, когда с уменьшением шага $\Delta\tau$ решение вначале уточняется, а при дальнейшем уменьшении точность ухудшается в связи с ростом влияния ошибок округления при выполнении большого объема вычислений в ЭВМ. Не все факторы вычислительного процесса поддаются правильному учету. Поэтому приближенные теоретические оценки точности и устойчивости метода следует использовать с осторожностью.

Ограничения, связанные со свойствами численного метода

Величина шага по времени $\Delta\tau$ ограничена возможностями применяемого численного метода. В этой связи следует упомянуть, что если используется неявная схема, то жесткие ограничения на максимальную величину шага по времени теоретически могут отсутствовать, в отличие от явных схем. Однако и при использовании неявной схемы имеются свои ограничения на шаг $\Delta\tau$. Эти ограничения связаны с ошибками округления и конечностью представления мантиссы числа в ЭВМ.

При выборе очень мелкого шага $\Delta\tau$ в случае использования неявной схемы элементы матрицы инерционных коэффициентов становятся слишком большими величинами по сравнению с элементами жесткостной матрицы, что ведет к заметному накоплению ошибок округления и потере точности вычислений. В таких ситуациях целесообразен переход к явным методам, которые становятся менее трудоемкими при выборе очень малых значений шага по времени $\Delta\tau$. Обычно такие ситуации возникают при моделировании удара, моделировании других, кратковременных, быстропротекающих процессов. И наоборот, при больших шагах $\Delta\tau$, когда рассматриваются процессы с характерным временем, сравнимым с периодами низших тонов собственных колебаний конструкции, целесообразно применение неявных методов.

При использовании явных методов максимальная величина шага по времени обусловлена устойчивостью процесса вычислений. Она обеспечивается, если шаг $\Delta\tau$ меньше, чем оценка вида

$$\Delta\tau_{max} \leqslant 2/\omega_{max}, \tag{2}$$

где ω_{max} — наивысшая собственная частота моделируемой системы (например, высшая частота собственных колебаний наименьшего из конечных элементов, используемых при расчете конструкции МКЭ). У различных вариантов явных методов числитель в формуле (2) может принимать другие, несколько более или менее высокие значения, например: 0.3, ..., 6, но эти отличия не являются принципиальными. В реальных вычислениях нередко используется шаг по времени, который на порядок меньше, чем (2). В любом случае явный метод для обеспечения точности и устойчивости вычислений требует использования очень малой величины шага по времени $\Delta\tau$. Соответственно, возникает необходимость выполнения очень большого количества таких шагов для моделирования поведения системы на достаточно длительном интервале времени. Его применение оправдывают простота реализации и малая трудоемкость вычислений на каждом шаге по времени в сравнении с неявными методами.

В задачах, связанных с расчетами сжимаемых течений, для обеспечения устойчивости вычислений требуется выполнение условий Куранта — Фридрихса — Леви вида $\Delta l/\Delta\tau \geqslant V + a$, где Δl — минимальный шаг пространственной сетки в расчетной области, V — местная скорость потока, a — местная скорость звука. Или, в другом виде, ставится требование, что число Куранта $C = (V + a)\Delta\tau/\Delta l \leqslant 1$. Это означает, что область зависимостей разностных уравнений должна включать в себя область зависимостей решаемых дифференциальных уравнений. Скорость распространения информации в моделируемой непрерывной среде не должна превышать скорость распространения информации используемого численного метода. За один шаг по времени $\Delta\tau$ звуковая (ударная) волна не должна выходить за границу расчетной ячейки. Таким образом, чем меньше размеры ячеек расчетной области течения, тем меньше должен быть задаваемый шаг по времени $\Delta\tau$ [45—49].

Сдвиг по времени

При решении задачи во временной области могут накапливаться ошибки не только в получаемых амплитудах колебаний, но и в фазах колебаний. Может возникать сдвиг параметров по времени. Во многих случаях эти ошибки не столь важны, и особое внимание им не уделяется. Однако существуют задачи, в которых требуется правильно учитывать сдвиг фаз между нагрузкой и перемещениями, входным и выходным сигналами системы регулирования, при анализе устойчивости системы управления и др. В этих ситуациях целесообразно осуществлять дополнительный контроль и коррекцию решения, использовать один и тот же шаг по времени, один и тот же метод решения связанных задач. При наличии достаточных вычислительных ресурсов возможно рассмотрение объединенной системы уравнений суммарной размерности (например, совместное решение задач аэродинамики и прочности). Однако в последнем случае существенно увеличивается трудоемкость, усложняется алгоритм решения и реализующее его программное обеспечение.

Выбор расчетного интервала времени

Выбор расчетного интервала времени является важным звеном подготовки исходных данных. Он должен быть по возможности небольшим, так как трудоемкость решения напрямую связана с величиной этого интервала. С увеличением интервала времени почти пропорционально растут вычислительные затраты, поэтому существует тенденция к его сокращению. Однако это сокращение не может быть осуществлено произвольным образом. Интервал времени ограничен реальной длительностью моделируемых процессов. Слишком короткий интервал не позволяет в должной мере изучить поведение конструкции. В частности, при моделировании удара рассматриваемый интервал времени не может быть короче длительности самого удара; при исследовании динамики нагружения его значение не может быть меньше, чем период изменения нагрузки или период собственных колебаний низшего тона конструкции. При исследованиях динамической устойчивости, когда рассматриваемая система находится вблизи зоны потери устойчивости, амплитуды колебаний нарастают или затухают достаточно медленно. В таких случаях возникает необходимость рассмотрения больших интервалов времени с длительностью порядка многих сотен периодов колебаний. Нередко имеют место переходные процессы с колебаниями типа «биений», когда периодически рост амплитуд колебаний сменяется их последующим падением. Существуют режимы, которые физически реализуются лишь по окончании длительного переходного процесса. Моделирование и анализ подобного рода процессов требуют повышенных вычислительных затрат в связи с необходимостью проведения вычислений с очень большим количеством шагов по времени. Кроме того, ставятся жесткие требования к самому методу. Он должен обеспечивать устойчивость решения при отсутствии дополнительного демпфирования, которое искажает результаты. Не каждый численный метод интегрирования удовлетворяет этим противоречивым требованиям.

Выбор начальных значений

Выбор начальных значений параметров задачи, особенно при решении в нелинейной постановке, является ответственным этапом работы, так как конечные результаты могут существенно зависеть от этого выбора. Устойчивость системы может смениться неустойчивостью, отрывное обтекание безотрывным, трение покоя между контактирующими элементами смениться трением скольжения и наоборот. Точки бифуркации, гистерезис, наличие нескольких зон устойчивости или неустойчивости и т.п. — все это требует конкретизации исходной информации. В противном случае могут быть получены совершенно непредсказуемые результаты. Даже если получено абсолютно точное решение исходных уравнений, это решение может не соответствовать реальности при существенном влиянии нелинейных факторов и задании неверных начальных условий. Хотя все перечисленное несколько усложняет подготовку исходных данных и затрудняет проведение расчетов, следует заметить, что данная особенность решения нелинейных задач приближает вычислительный эксперимент к реальному эксперименту. Например, при решении задачи в линейной постановке нет особой разницы, чему равен угол атаки крыла: 2° или 20°. Можно даже решать задачу в безразмерном виде. В реальности параметры течения, характер течения при обтекании крыла при малых и больших углах атаки существенно отличаются, что, собственно, и моделируют нелинейные методы расчета с той или иной степенью достоверности. Таким образом, при решении нелинейных задач, с одной стороны, имеют место повышенная сложность и трудоемкость подготовки исходных данных, повышенные требования к квалификации расчетчика, с другой стороны, эти методы вынуждают более точно следовать реальной картине нагружения, конкретизировать параметры исследуемого процесса, что является преимуществом данного подхода.

Выбор численного метода

Выбор численного метода обусловлен объективными и субъективными факторами.

Объективными факторами являются реальные преимущества метода в трудоемкости вычислений, в требуемых ресурсах ЭВМ, в устойчивости решения, в точности получаемых результатов. Эти параметры можно оценить численно при проведении сравнений результатов решений тестовых примеров, получаемых альтернативными вариантами численных методов.

Субъективными факторами являются различного рода публикации, рекламные материалы к коммерческим программам, которые навязывают продавцы этих программ потребителю. Сюда же могут быть отнесены собственный опыт использования метода, наличие многократно протестированных собственных программ, применение освоенных пользователем коммерческих программ, в которых не предусмотрены другие варианты решения задачи. Субъективные факторы сложно оценить численно, хотя для рассмотрения таких ситуаций существует метод экспертных оценок.

В научных и технических публикациях предлагается достаточно большой выбор численных методов интегрирования уравнений по времени. На практике получили распространение методы, которые уже подтвердили свои положительные качества при решении многих реальных задач. Опыт их использования может быть перенесен на новые задачи. Однако поиск более рациональных вариантов численных методов продолжается, так как каждому методу присущи свои недостатки. Об этом свидетельствует сам факт существования альтернативных вариантов этих методов. Вопросы снижения трудоемкости и повышения точности и устойчивости решения по-прежнему остаются актуальными.

1.2. Численное интегрирование уравнений первого порядка

Рассмотрение приемов численного решения удобно начать с более простых задач интегрирования уравнений первого порядка.

Существует большая группа численных методов, позволяющих осуществлять интегрирование уравнений первого порядка. Приведем некоторые варианты таких методов.

Пусть решается уравнение вида

$$\dot{x} = f(x, \tau), \tag{3}$$

к которому могут быть приведены уравнения движения, уравнения газовой динамики, термодинамики и др.

Пошаговые методы решения дифференциального уравнения (разностные методы, методы дискретного переменного) используют локальные аппроксимации искомой функции. Для последовательных расчетных моментов времени τ_i, выбранных с шагом по времени $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$, который в некоторых случаях может быть переменным, вычисляются дискретные значения искомой функции x_i по ее k значениям, вычисленным ранее на предыдущих k последовательных шагах. Если $k = 1$, то метод называется одношаговым, при $k > 1$ метод относят к многошаговым.

В рассматриваемых соотношениях обозначено: i — номер шага по времени. Если вычисления проводятся с постоянным шагом по времени $\Delta\tau$, что обычно имеет место, то номерам шагов по времени $i + 1$, i, $i - 1$, $i - 2$, $i - 3$ соответствуют моменты времени $\tau + \Delta\tau$, τ, $\tau - \Delta\tau$, $\tau - 2\Delta\tau$, $\tau - 3\Delta\tau$. Индексам $i + 1/2$ и $i - 1/2$ в формулах соответствуют моменты времени $\tau + \Delta\tau/2$ и $\tau - \Delta\tau/2$.

Как правило, при использовании неявных методов вычисления проводятся с постоянным шагом по времени $\Delta\tau$, так как в противном случае возникает необходимость применения трудоемкой процедуры повторного формирования разрешающей матрицы системы уравнений. При использовании явных методов максимальная величина шага по времени $\Delta\tau$ ограничена условием устойчивости решения. Обычно эта величина очень мала, поэтому часто выбирается шаг, близкий к максимально допустимому значению. Соответственно, увеличить шаг $\Delta\tau$ нельзя по условиям устойчивости, а его существенное уменьшение ведет к дополнительному повышению вычислительных затрат. Поэтому и явные методы в большинстве случаев используют фиксированный шаг по времени.

Одношаговые методы

Явный метод Эйлера

Самым простым (и самым первым) одношаговым методом является метод Эйлера, в котором учитываются только первые два члена ряда Тейлора:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta\tau \cdot f(x_i, \tau_i). \tag{4}$$