



# МИР

## цифровой обработки

С.В. Умняшкин

### Основы теории цифровой обработки сигналов

Издание четвертое,  
исправленное

ТЕХНОСФЕРА

Москва  
2018

**УДК 519.6:621.391**

**ББК 32.811**

**У54**

***Рецензенты:***

*В.П. Дворкович, доктор технических наук, профессор, заведующий базовой кафедрой мультимедийных технологий и телекоммуникаций Московского физико-технического института (государственного университета)*

*Кафедра вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (национального исследовательского университета)*

**У54 Умняшкин С.В.**

**Основы теории цифровой обработки сигналов: Учебное пособие.**

*Издание четвертое, исправленное*

**Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2018. – 528 с. ISBN 978-5-94836-508-4**

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Прикладная математика», «Информатика и вычислительная техника», и направлено на изучение теоретических основ цифровой обработки сигналов (ЦОС). Помимо базовых разделов ЦОС, связанных с цифровым представлением сигналов, анализом и синтезом цифровых фильтров, в пособии рассматриваются вопросы многоскоростной обработки сигналов, адаптивной фильтрации, дискретного спектрального анализа. Значительное внимание уделено таким специальным разделам ЦОС, как эффективное представление сигналов (сжатие данных), теория и приложения дискретных вейвлет-преобразований.

Пособие также может быть рекомендовано в качестве дополнительного учебного материала для других инженерных направлений подготовки, связанных с ЦОС (радиотехника, электроника, телекоммуникации и связь, автоматическое управление и др.). При этом базовая часть материала первых глав представляет собой основу для вводного курса (уровень бакалавриата), а в полном объеме учебное пособие ориентировано на более углубленное изучение теории ЦОС в магистратуре.

**УДК 519.6:621.391**

**ББК 32.811**

© 2018, Умняшкин С.В.

© 2018, АО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», оригинал-макет, оформление

**ISBN 978-5-94836-508-4**

# Содержание

Предисловие.....	6
Список сокращений и обозначений.....	9
<b>Глава 1. Элементы функционального анализа и спектрального представления функций.....</b>	<b>11</b>
1.1. Линейные нормированные пространства.....	11
1.2. Пространства со скалярным произведением.....	18
1.3. Примеры ортогональных систем в пространстве $L_2$ .....	26
1.4. Тригонометрические ряды Фурье. Явление Гиббса.....	32
1.5. Интеграл Фурье.....	37
1.6. Принцип неопределенности время-частотного представления сигналов.....	43
1.7. Обобщенное преобразование Фурье.....	49
1.8. Энергетический спектр. Спектр мощности.....	53
<b>Глава 2. Дискретизация и квантование сигналов.</b>	
<b>Дискретные ортогональные преобразования.....</b>	<b>58</b>
2.1. Преобразование непрерывных сигналов в дискретные.....	58
2.2. Дискретизация по критерию наибольшего отклонения.....	60
2.3. Частотный критерий выбора шага дискретизации.....	61
2.4. Спектр дискретного сигнала.....	66
2.5. Дискретизация узкополосных сигналов.....	70
2.6. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).....	77
2.7. Быстрое преобразование Фурье (БПФ). Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.....	85
2.8. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.....	98
2.9. Дискретное преобразование Уолша.....	103
2.10. Дискретное преобразование Хаара.....	109
2.11. Некоторые применения дискретных ортогональных преобразований.....	113
2.12. Квантование дискретных сигналов.....	116
<b>Глава 3. Описание и анализ линейных дискретных систем (ЛДС).....</b>	<b>126</b>
3.1. Нормирование временной и частотной осей.....	126
3.2. $Z$ -преобразование.....	127
3.3. Линейные дискретные фильтры (ЛДФ).....	132
3.4. Соединения и структурные схемы фильтров.....	137
3.5. Устойчивость ЛДФ.....	145
3.6. Частотная характеристика ЛДФ.....	147
3.7. Минимально-фазовые системы. Фазовые звенья.....	155

3.8.	Нахождение отклика фильтра с использованием БПФ	161
3.9.	Многоскоростная обработка сигналов	164
3.10.	Изменение частоты дискретизации сигналов при помощи полифазных фильтров	170
3.11.	Эффекты квантования в цифровых системах	177
3.12.	Согласованный дискретный фильтр	187
3.13.	Линейная дискретная система как генератор случайных сигналов. Полусная модель сигналов	194
3.14.	Фильтр Калмана	199
<b>Глава 4.</b>	<b>Введение в методы синтеза цифровых фильтров</b>	<b>206</b>
4.1.	Этапы разработки цифровых фильтров	206
4.2.	КИХ-фильтры с линейной фазой. Синтез КИХ-фильтров методом частотной выборки	212
4.3.	Оконный метод синтеза КИХ-фильтров	221
4.4.	Синтез оптимальных КИХ-фильтров	232
4.5.	Специальные КИХ-фильтры: преобразователь Гильберта и цифровой дифференциатор	241
4.6.	Основные характеристики аналоговых линейных систем и их связь с характеристиками ЛДС	250
4.7.	Синтез БИХ-фильтров по аналоговым прототипам	256
4.8.	Синтез БИХ-фильтров методом инвариантности импульсной характеристики	268
4.9.	Синтез БИХ-фильтров методом билинейного Z-преобразования	273
4.10.	Выбор структуры для реализации фильтра	280
4.11.	Адаптивная фильтрация. Фильтр Винера	286
<b>Глава 5.</b>	<b>Основы прикладной теории информации</b>	<b>299</b>
5.1.	Мера количества информации для дискретного источника сообщений без памяти	299
5.2.	Основные теоремы о кодировании источника без памяти	305
5.3.	Эффективное кодирование дискретного источника без памяти по методам Шэннона — Фано и Хаффмана	315
5.4.	Кодирование длин серий	321
5.5.	Арифметическое кодирование	324
5.6.	Условная энтропия	333
5.7.	Кодирование дискретного источника с памятью	337
5.8.	Статистическое моделирование источника	344
5.9.	Непрерывный источник сообщений. Дифференциальная энтропия	345
5.10.	Передача дискретного сообщения по каналу с помехами	349
5.11.	Словарные методы кодирования	356

<b>Глава 6. Применение дискретных ортогональных преобразований для компрессии и спектрального анализа сигналов</b>	<b>363</b>
6.1. Корреляция как мера статистической зависимости данных. Преобразование Карунена — Лоэва	363
6.2. Эффективность использования дискретных ортогональных преобразований для кодирования коррелированных данных	369
6.3. ДПФ в вещественной форме. Дискретное преобразование Хартли	376
6.4. Дискретное косинусное преобразование (ДКП)	378
6.5. Компрессия изображений на основе двумерного ДКП	386
6.6. Дискретное псевдокосинусное преобразование	392
6.7. Оптимизация алгоритмов сжатия данных с потерями	401
6.8. Аппроксимационный подход к выбору преобразований для представления дискретных сигналов. Частотная трактовка	408
6.9. Время-частотный анализ. Оконное преобразование Фурье	412
6.10. Использование ДПФ для спектрального анализа	419
<b>Глава 7. Вейвлет-преобразования и их приложения для обработки дискретных сигналов</b>	<b>429</b>
7.1. Кратно-масштабный анализ (КМА)	429
7.2. Проектирование функций на подпространства КМА	435
7.3. Вычисление дискретных вейвлет-преобразований (ДВП)	441
7.4. Квадратурно-зеркальные фильтры (КЗФ)	445
7.5. Свойства КЗФ	451
7.6. Построение масштабирующих функций и вейвлетов по масштабирующим уравнениям	458
7.7. Вейвлеты Добеши	462
7.8. Биортогональные вейвлет-преобразования	468
7.9. Применение дискретных вейвлет-преобразований для сжатия сигналов	472
7.10. Подавление шумов фильтрацией в базисе дискретных вейвлет-преобразований	476
7.11. Двумерные дискретные вейвлет-преобразования	479
7.12. Метод сжатия цифровых изображений JPEG 2000	487
7.13. Вейвлет-пакеты	494
7.14. Вычисление ДВП по схеме лифтинга	506
<b>Заключение</b>	<b>524</b>
<b>Литература</b>	<b>525</b>

## Предисловие

В последние два десятилетия методы цифровой обработки сигналов (ЦОС) в радиотехнике, электронике, системах связи, контроля и управления стали преобладающими, активно вытесняя методы аналоговой обработки. Этому способствовала стремительно увеличивавшаяся производительность вычислительной техники, которая уже проникла практически во все области человеческой деятельности. Сегодня, например, говоря о записи или обработке аудио- и видеоинформации, мы не уточняем, что речь идет о цифровых форматах, подразумевая это само собой разумеющимся. Важность изучения методов ЦОС трудно переоценить: вопросы, связанные с цифровой обработкой и представлением сигналов, давно перестали быть узкоспециальными. Основы знаний в данной области требуются большинству инженеров, а для специалистов в области электроники, радиотехники и телекоммуникаций, информатики и вычислительной техники необходимо более глубокое понимание основных методов ЦОС и математической теории, лежащей в их основе. Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие посвящено изучению данных вопросов.

Изначально ЦОС развивалась как ветвь, растущая из теории обработки аналоговых сигналов, и рассматривалась как раздел электроники и радиотехники. Однако внедрение в системы обработки сигналов цифровых программируемых процессоров и контроллеров, расширение спектра и увеличение сложности алгоритмов ЦОС, реализация которых стала возможна в том числе в реальном масштабе времени, превратили ЦОС в политехническую дисциплину. Сегодня для математиков-программистов, специалистов в области информатики и вычислительной техники эта область знаний представляет собой постоянно расширяющееся поле для приложения усилий. Данную тенденцию необходимо учитывать при подготовке инженерных кадров. В предлагаемом вниманию читателя учебном пособии рассматриваются основы теории ЦОС, изложение которой по формату и содержанию ориентировано в первую очередь именно



на студентов, обучающихся по инженерным направлениям «Прикладная математика» и «Информатика и вычислительная техника» (бакалавриат и магистратура). Однако при написании пособия автор старался опираться лишь на курс высшей математики, общий для всех инженерных направлений подготовки, поэтому оно может быть рекомендовано также для студентов, обучающихся по профилям подготовки в области радиотехники, связи и телекоммуникаций.

Первая глава носит вводный характер и содержит изложение тех основных положений функционального анализа и теории преобразования Фурье, которые потребуются далее в последующих главах. Помимо этого, в первой главе вводятся популярные в ЦОС функциональные системы Уолша и Хаара.

Вторая глава посвящена вопросам дискретизации непрерывных сигналов и преобразований, прежде всего преобразования Фурье. Значительное внимание уделено частотным аспектам дискретизации (как широкополосных, так и узкополосных сигналов) и построению быстрых алгоритмов вычислений дискретных преобразований Фурье, Уолша, Хаара. Кроме того, рассматривается скалярное и векторное квантование сигналов.

В третьей главе вводятся основные понятия теории линейных дискретных систем (фильтров). Основное внимание уделено анализу систем. Рассматриваются вопросы передискретизации сигналов и влияния эффектов квантования в цифровых системах. Также изучаются некоторые вопросы согласованной фильтрации и скалярных фильтров Калмана.

В четвертой главе изложены основные классические методы синтеза КИХ- и БИХ-фильтров по заданной частотной характеристике. Завершает главу рассмотрение основ теории адаптивных фильтров.

Пятая глава представляет собой введение в теорию информации, а также содержит описание ряда используемых на практике методов эффективного статистического (энтропийного) кодирования.

Первые пять глав включают в себя рассмотрение общих теоретических вопросов ЦОС. В сокращенном варианте этот материал может быть использован для базовой подготовки бакалавров по различным инженерным направлениям обучения. В полном объеме материал этих глав может составить основу учебного курса для подготовки магистров, имеющих профиль обучения со специализацией в ЦОС, прежде всего, по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Прикладная математика».

Две последние главы (шестая и седьмая) представляют собой более углубленное теоретическое рассмотрение таких специальных разделов ЦОС, как эффективное представление и компрессия сигналов, цифровой спектральный анализ. Седьмая глава целиком посвящена применению дискретных вейвлет-преобразований в ЦОС и может составить основу отдельного спецкурса.

В книге используется двойная нумерация для рисунков, формул, примеров и теорем: первая цифра обозначает главу, вторая — порядковый номер формулы (примера, теоремы) в главе. При нумерации (обозначении) аксиом и свойств используется значок  $\circ$ , например  $1^\circ$ . Начало и окончание доказательств теорем, решений примеров обозначается соответственно символами  $\blacktriangleleft$  и  $\blacktriangleright$ . Упражнения (задачи) для самостоятельного решения приводятся непосредственно в тех местах, где их появление логически наиболее связано с излагаемым материалом, а не в конце глав или разделов, как это чаще всего практикуется в учебной литературе.

Основу данного пособия составляют учебные курсы, читаемые автором на протяжении ряда лет в Национальном исследовательском университете «Московский институт электронной техники» (МИЭТ) для бакалавров и магистров, обучающихся по направлению «Прикладная математика». Большое значение в работе над пособием имело обсуждение его содержания с коллегами. Автор выражает глубокую признательность доценту кафедры высшей математики №1 МИЭТ В.В. Лесину и рецензентам, внимательно ознакомившимся с текстом рукописи и высказавшим ряд ценных замечаний, которые были учтены при подготовке издания.



## Список сокращений и обозначений

- АЦП — аналого-цифровое преобразование  
АЧХ — амплитудно-частотная характеристика  
БИХ — бесконечная импульсная характеристика  
БПУ — быстрое преобразование Уолша  
БПФ — быстрое преобразование Фурье  
БПХ — быстрое преобразование Хаара  
ВДПФ — вещественное дискретное преобразование Фурье  
ВЧ — верхние частоты  
ГВЗ — групповое время задержки  
ДВП — дискретное вейвлет-преобразование  
ДКП — дискретное косинусное преобразование  
ДПГ — дискретный преобразователь Гильберта  
ДПКП — дискретное псевдокосинусное преобразование  
ДПЛ — дискретное преобразование Лапласа  
ДПУ — дискретное преобразование Уолша  
ДПФ — дискретное преобразование Фурье  
ДПХ — дискретное преобразование Хаара  
ИХ — импульсная характеристика  
КИХ — конечная импульсная характеристика  
КЗФ — квадратурно-зеркальные фильтры  
КМА — кратно-масштабный анализ  
КФ — ковариационная функция  
ЛДС — линейная дискретная система  
ЛДФ — линейный дискретный фильтр  
ЛИВС — линейная инвариантная во времени система  
ЛНП — линейное нормированное пространство  
НОД — наибольший общий делитель  
НЧ — нижние частоты  
ОДКП — обратное ДКП  
ОДПФ — обратное ДПФ  
ОПФ — оконное преобразование Фурье  
ПФ — передаточная функция

ЧХ — частотная характеристика

ФВЧ — фильтр верхних частот

ФНЧ — фильтр нижних частот

ФЧХ — фазочастотная характеристика

ЦД — цифровой дифференциатор

ЦОС — цифровая обработка сигналов

ЦФ — цифровой фильтр

ЭНП — элемент наилучшего приближения

$\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел

$\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$  — множество действительных чисел

$\mathbb{Z}$  — множество целых чисел

$x \gg y$  — число  $x$  много больше числа  $y$

$[x]$  — целая часть числа  $x \geq 0$

$\text{round}(x) = \text{sign}(x)[|x| + 0,5]$  — округление  $x$  до ближайшего целого

$x \bmod p$  — остаток от деления целого числа  $x \geq 0$  на число  $p \in \mathbb{N}$

$a \oplus b = (a + b) \bmod 2$  — сложение по модулю 2, где  $a \in \{0, 1\}$  и  $b \in \{0, 1\}$

$A \oplus B$  — ортогональная сумма подпространств  $A$  и  $B$

$\|x\|$  — норма элемента  $x$

$\langle x, y \rangle$  — скалярное произведение элементов  $x, y$

$\bar{A}$  — замыкание множества  $A$

$\bar{z} = \text{Re } z - i \text{Im } z$  — комплексное сопряжение числа  $z \in \mathbb{C}$

$\text{Res}[f(z), z_0]$  — вычет функции  $f(z)$  в точке  $z_0$

$\mathcal{F}\{f(t)\}$  — преобразование Фурье функции  $f(t)$

$\mathcal{F}^{-1}\{F(v)\}$  — обратное преобразование Фурье функции  $F(v)$

$\mathcal{L}\{f(t)\}$  — преобразование Лапласа функции  $f(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$  — обратное преобразование Лапласа функции  $G(p)$

$Z\{x(n)\}$  —  $Z$ -преобразование последовательности  $x(n)$

$Z^{-1}\{X(z)\}$  — обратное  $Z$ -преобразование функции  $X(z)$

$M(X)$  — математическое ожидание случайной величины  $X$

$D(X)$  — дисперсия случайной величины  $X$

# ГЛАВА I

## ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

### I.1. Линейные нормированные пространства

Функциональный анализ — раздел математики, который представляет собой абстрактное обобщение линейной алгебры и математического анализа. Рассмотрим некоторые понятия и методы функционального анализа, которые наиболее важны для теории обработки сигналов.

**Определение.** Множество  $E$  элементов произвольной природы называется *линейным пространством*, если в нем однозначно определены операции сложения элементов  $x+y$  и умножения элементов на скаляр  $\lambda$  (вещественное или комплексное число)  $\lambda x$ , результатом которых является элемент из того же множества  $E$ , причем выполняются следующие аксиомы.

1°.  $\forall x, y \in E: x+y = y+x$ .

2°.  $\forall x, y, z \in E: (x+y)+z = x+(y+z)$ .

3°.  $\exists \theta \in E, \forall x \in E: x+\theta = x$  (существование нулевого элемента  $\theta$ ).

4°.  $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu: (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .

5°. Умножение на скаляры  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ :  $0x = \theta, 1x = x$ .

6°.  $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu: (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .

7°.  $\forall x, y \in E, \forall \lambda: \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ .

Назовем *противоположным* элементом для  $x \in E$  такой элемент  $y \in E$ , что  $x + y = \theta$ . Из аксиом 5° и 6° следует, что  $y = (-1)x$  (элемент  $x$ , умноженный на число  $-1$ ). Обозначим противоположный элемент как  $-x$ .

В курсе линейной алгебры изучались линейные пространства  $\mathbb{R}^n$  арифметических векторов размерности  $n$ . Приведенное выше аксиоматическое определение обобщает понятие линейного пространства  $\mathbb{R}^n$  на множества произвольной природы. По аналогии, элементы любого линейного пространства также будем называть *векторами*, а сами линейные пространства — *векторными пространствами*. В том же обычном смысле будем понимать термины «базис пространства», «линейная зависимость» (независимость) векторов и «размерность пространства». Напомним, что число  $n$  называется размерностью векторного пространства  $E$  (обозначается  $n = \dim E$ ), если в  $E$  найдется  $n$  линейно независимых ненулевых элементов, а любые  $(n+1)$  ненулевых элементов пространства  $E$  являются линейно зависимыми. Линейное пространство может иметь бесконечную размерность.

**Пример 1.1.** Пусть  $C[a; b]$  — множество всех функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$ . Является ли это множество линейным пространством и если да, то какова его размерность?

◀ Выполнение аксиом 1°–7° очевидно, нулевым элементом  $\theta$  является функция  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a; b]$ . Покажем, что  $C[a; b]$  — бесконечномерное пространство. Выберем из множества  $C[a; b]$   $n$  ненулевых элементов — функций  $y_i(x) = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . При любом числе  $n$  эти элементы являются линейно независимыми, так как равенство нулю многочлена  $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{i-1} = 0$  для всех точек отрезка  $x \in [a, b]$  возможно лишь в случае  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поскольку число  $n$  можно выбрать сколь угодно большим, то  $\dim(C[a; b]) = \infty$ . ▶

**Лемма 1.1.** (Неравенство Минковского для интегралов.) Пусть для  $p \geq 1$  существуют интегралы  $\int_a^b |u(x)|^p dx$ ,  $\int_a^b |v(x)|^p dx$  (пределы интегрирования — не обязательно конечные). Тогда существует также интеграл  $\int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx$ , причем верна оценка:

$$\left( \int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.1)$$

Опустим доказательство леммы, которое носит технический характер (см., например, [17]).

**Определение.** Линейное пространство  $E$  называется *нормированным*, если каждому элементу  $x \in E$  поставлено в соответствие вещественное число  $\|x\|$ , называемое *нормой*, для которой выполняются следующие аксиомы.

- 1°. Невырожденность нормы.  $\forall x \in E: \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ .
- 2°. Однородность нормы.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .
- 3°. Неравенство треугольника.  $\forall x, y \in E: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

В одном и том же векторном пространстве  $E$  норму можно вводить различными способами.

**Пример 1.2.** Рассмотрим векторное пространство  $C[a; b]$  из примера 1.1. Покажите самостоятельно, что приводимые ниже способы вычисления нормы удовлетворяют аксиомам 1°–3°:

$$\text{а) } \|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad \text{б) } \|x\| = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \text{ где } p \geq 1.$$

*Указание:* в пункте б) для доказательства аксиомы треугольника воспользуйтесь неравенством Минковского (1.1).

**Определение.** *Расстоянием* между элементами  $x, y$  нормированного векторного пространства  $E$  назовем число  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

На основании аксиом нормы легко показать, что введенное расстояние между элементами обладает следующими свойствами.

- 1°.  $\forall x, y \in E: \rho(x, y) = \rho(y, x)$ .
- 2°.  $\forall x, y \in E: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- 3°.  $\forall x, y, z \in E: \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$  (неравенство треугольника).

◀ Первое и второе свойства очевидны. Для неравенства треугольника имеем:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(y, z). \blacktriangleright$$

Расстояние между элементами называют *метрикой* пространства. Пространство (не обязательно нормированное), каждой паре  $x, y$  элементов которого поставлено в соответствие вещественное число  $\rho(x, y)$  (расстояние), обладающее свойствами 1°–3°, называется *метрическим*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Несмотря на то что метрическое пространство может и не быть нормированным, мы будем рассматривать только нормированные метрические пространства с метрикой  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

**Определения.** В метрическом пространстве  $E$  *открытым шаром* радиуса  $r > 0$  с центром  $x_0 \in E$  назовем множество  $S_r(x_0) = \{x \in E \mid \rho(x, x_0) < r\}$ , *замкнутым шаром* — множество  $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in E \mid \rho(x, x_0) \leq r\}$ . *Окрестностью* точки  $x_0 \in E$  будем называть открытый шар произвольного радиуса  $\varepsilon$ , т. е. множество  $S_\varepsilon(x_0)$ .

Понятия нормы, расстояния, окрестности являются исходными для построения анализа в линейных нормированных пространствах.

**Определение.** В линейном нормированном пространстве (ЛНП)  $E$  элемент  $y \in E$  называется *пределом последовательности*  $\{x_k\} \subset E$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(y, x_k) = 0$ . При этом говорят, что последовательность  $\{x_k\}$  *сходится* к элементу  $y$  и используют обозначение  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$ .

**Определение.** Элемент  $a$  из ЛНП  $E$  называется *предельной точкой* множества  $M \subset E$ , если в любой окрестности  $a$  содержится хотя бы один элемент  $x \in M$ ,  $x \neq a$ . То есть  $\forall r > 0: (S_r(a) \setminus a) \cap M \neq \emptyset$ .

**Теорема 1.1.** Для того чтобы элемент  $a$  из ЛНП  $E$  был предельной точкой множества  $M \subset E$ , необходимо и достаточно существование последовательности  $\{x_k\} \subset M$ ,  $x_k \neq a$ , сходящейся к  $a$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ .

◀ **Необходимость.** Возьмем сходящуюся к нулю числовую последовательность из положительных элементов, например  $\varepsilon_k = 1/k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Так как  $a$  — предельная точка  $M$ , то, по определению,  $\forall \varepsilon_k > 0 \exists x_k \in M$ ,  $x_k \neq a$ :  $x_k \in S_{\varepsilon_k}(a)$ . Поскольку  $\rho(x_k, a) = \|x_k - a\| < \varepsilon_k = 1/k$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$ , то построенная последовательность  $\{x_k\}$  сходится к точке  $a$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ .

**Достаточность.** Так как  $\exists \{x_k\}$ ,  $x_k \in M$ ,  $x_k \neq a$ , причем  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , то, по определению предела,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \|x_n - a\| < \varepsilon$ . То есть в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержатся элементы  $x_n \in M$ ,  $x_n \neq a$ , поэтому точка  $a$  является предельной для множества  $M$ . ▶

**Определение.** Пусть  $M$  — подмножество в ЛНП  $E$ , а  $M'$  — множество всех предельных точек  $M$ . Объединение множеств  $\bar{M} = M \cup M'$  называется *замыканием* множества  $M$ . Если  $M$  содержит все свои предельные точки, т. е.  $M' \subset M$ , то множество  $M$  называется *замкнутым*.

**Определение.** Множество  $M \subset E$  векторного пространства  $E$  называется *линейным многообразием*, если  $\forall x, y \in M, \forall \lambda, \mu: (\lambda x + \mu y) \in M$ .

**Определение.** Замкнутое линейное многообразие  $L$  в ЛНП  $E$ ,  $L \subset E$ , назовем *подпространством*.

**Определение.** *Расстоянием* от точки  $x$  из ЛНП  $E$  до множества  $L \subset E$  называется величина  $\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$ .

Для ограниченного снизу числового множества всегда найдется точная нижняя грань. Поскольку норма неотрицательна, то расстояние от точки до подмножества (подпространства) всегда существует. Расстояние  $\rho(x, L)$  характеризует наилучшее приближение (т. е. *аппроксимацию*) элемента  $x \in E$  элементами подмножества  $L \subset E$ .

**Определение.** Элемент  $u \in L$ , где  $L$  — подпространство из ЛНП  $E$ , называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) для заданного элемента  $x \in E$ , если  $\rho(x, L) = \|x - u\|$ .

Элемент наилучшего приближения существует не всегда, а также может быть не единственным.

**Пример 1.3.** Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^2$ , т. е. множество упорядоченных пар вещественных чисел  $x = (\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 \in \mathbb{R}$ . Введем норму следующим образом:  $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$  (убедитесь самостоятельно, что аксиомы нормы выполняются). Рассмотрим подмножество  $L \subset \mathbb{R}^2, L = \{(\xi_1, \xi_2) | \xi_1 = \xi_2\} = \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Тогда:

- 1)  $L$  — подпространство в  $E$ ;
- 2) для элемента  $x = (-1, 1)$  имеем  $\rho(x, L) = 2$ , причем ЭНП — не единственный.

◀ 1. Множество  $L$  является линейным многообразием (убедитесь самостоятельно). Покажем, что  $L$  — замкнуто. Допустим противное: пусть существует элемент  $y \notin L$ , т. е.  $y = (\beta_1, \beta_2), \beta_1 \neq \beta_2$ , который является предельной точкой множества  $L$ . Тогда для любой точки  $u = (\alpha, \alpha)$  из множества  $L$  расстояние

$$\rho(y, u) = |\beta_1 - \alpha| + |\beta_2 - \alpha| \geq |(\beta_1 - \alpha) + (\alpha - \beta_2)| = |\beta_1 - \beta_2| = r(y) > 0,$$

т. е. ограничено снизу положительной величиной  $r = r(y)$ . Следовательно, в окрестности  $S_r(y)$  нет ни одного элемента из множества  $L$ , и произвольно выбранная точка  $y \notin L$  не является предельной

для  $L$ . Поэтому все предельные точки множества  $L$  могут содержаться только в самом этом множестве и  $L$  является замкнутым линейным многообразием (подпространством) в  $\mathbb{R}^2$ .

2. Рассмотрим функцию  $f(t) = |t+1| + |t-1| = \begin{cases} -2t, & t < -1 \\ 2, & -1 \leq t \leq 1 \\ 2t, & 1 < t \end{cases}$ .

Очевидно,  $\inf_{t \in \mathbb{R}} f(t) = \min_{t \in \mathbb{R}} f(t) = 2$ . Для расстояния от точки  $x = (-1, 1)$  до подпространства  $L$  имеем:

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|u - x\| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} (|\alpha + 1| + |\alpha - 1|) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\alpha) = 2.$$

При этом элементами наилучшего приближения для  $x$  являются все точки отрезка  $L^* = \{(\alpha, \alpha) \mid -1 \leq \alpha \leq 1\}$ ,  $L^* \subset L$ . ►

**Определение.** Пусть  $X$  — ЛНП. Последовательность  $\{x_n\} \subset X$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ . ( $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел.)

Напомним, что для случая  $X = \mathbb{R}$  (множество действительных чисел) в курсе математического анализа был доказан *критерий Коши*: числовая последовательность  $\{x_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Справедлив ли критерий Коши в произвольном ЛНП?

**Лемма 1.2.** Всякая сходящаяся в ЛНП  $X$  последовательность  $\{x_n\}$  — фундаментальна.

► Так как последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ , и  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N: \|x_n - x\| < \varepsilon/2$ . Тогда также  $\forall p \in \mathbb{N}: \|x_{n+p} - x\| < \varepsilon/2$ , поэтому  $\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - x + x - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x\| + \|x_n - x\| < \varepsilon$ , где число  $\varepsilon > 0$  может быть выбрано сколь угодно малым. Следовательно, последовательность  $\{x_n\} \subset X$  является фундаментальной. ►

**Упражнение.** Покажите самостоятельно, что если последовательность  $\{x_n\}$  — фундаментальна, то последовательность  $\{\lambda x_n\}$  также является фундаментальной.

Возникает вопрос: а всякая ли фундаментальная последовательность  $\{x_n\} \subset X$  сходится в произвольном ЛНП  $X$ ? Для каждой ли фундаментальной последовательности существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ ?



**Определение.** ЛНП называется *полным*, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность. Полное ЛНП называется *банаховым* (или пространством Банаха).

**Пример 1.4.** Простейший пример пространства Банаха — множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  с нормой  $\|x\| = |x|$ .

**Пример 1.5.** Пространство  $\tilde{L}_2[0; T]$  непрерывных на отрезке  $t \in [0; T]$  функций с нормой  $\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$  не является банаховым.

◀ Покажем, что это пространство неполно. Выберем на отрезке  $t \in [0; T]$  кусочно-гладкую функцию  $f(t)$ , имеющую разрыв первого рода. Если составить для этой функции тригонометрический ряд Фурье, то, как известно, частичные суммы ряда

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

(непрерывные функции) будут сходиться в среднеквадратичном смысле к функции  $f(t)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^T |f(t) - s_n(t)|^2 dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0,$$

где  $\{s_n\} \subset \tilde{L}_2[0; T]$ , а  $f \notin \tilde{L}_2[0; T]$ . Это означает, что последовательность  $\{s_n\}$  — фундаментальна в  $\tilde{L}_2[0; T]$  (доказательство данного утверждения проводится аналогично схеме доказательства леммы 1.2). Однако в силу единственности предела последовательность  $\{s_n\}$  не может сходиться к элементу пространства  $\tilde{L}_2[0; T]$ , так как выбранная нами функция  $f(t)$  — разрывная. Отсюда следует, что пространство  $\tilde{L}_2[0; T]$  не является полным. ▶

**Определения.** Пусть  $X$  — ЛНП (не обязательно банахово), а  $\{x_n\}$  — некоторая последовательность,  $\{x_n\} \subset X$ . Формально составленная сумма  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  называется *рядом* в  $X$ , а элемент  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  — *n-й частичной суммой ряда*. (Заметим, что  $\forall n: s_n \in X$ , см. определение ЛНП). Ряд называется *сходящимся* по норме ЛНП  $X$ , если в  $X$  сходится последовательность элементов  $\{s_n\}$ , т. е.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in X$ . Элемент  $s$  называется *суммой ряда*, а запись  $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$  означает, что ряд сходится по норме  $X$  и его сумма равна  $s$ .

## 1.2. Пространства со скалярным произведением

**Определение.** Линейное пространство  $E$  называется *евклидовым*, если каждой паре его элементов  $x, y \in E$  поставлено в соответствие вещественное число  $\langle x, y \rangle$ , называемое *скалярным произведением*, причем выполняются следующие аксиомы.

$$1^\circ. \forall x \in E: \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ причем } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

$$2^\circ. \forall x, y \in E: \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$3^\circ. \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

$$4^\circ. \forall x, y, z \in E: \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Заметим, что в данном определении ничего не говорится о нормированности пространства  $E$ . Однако евклидово пространство можно превратить в нормированное, если ввести норму следующим образом:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.2)$$

Аксиомы нормы  $1^\circ$  и  $2^\circ$  при этом выполняются очевидным образом. Для доказательства выполнения аксиомы  $3^\circ$  (неравенства треугольника) предварительно рассмотрим следующую лемму.

**Лемма 1.3.** Норма, введенная в соответствии с определением (1.2), удовлетворяет неравенству Коши — Буняковского (или Шварца):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

◀ Заметим, что  $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x - \lambda y\|^2 \geq 0$ . Поэтому

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Тогда дискриминант полученного квадратного трехчлена переменной  $\lambda$ :  $4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ , что и доказывает неравенство Коши — Буняковского. ▶

Докажем теперь выполнение аксиомы треугольника. Так как

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2,$$

то, применяя к последнему выражению лемму 1.3, получаем:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \text{ или } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Определения.** Пусть  $E$  — линейное пространство с введенным скалярным произведением. *Ортогональными элементами*

пространства  $E$  называются такие элементы  $x, y \in E$ , что  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ортогональность элементов будем обозначать  $x \perp y$ . (Очевидно, нулевой элемент ортогонален всем элементам пространства.) *Ортогональной системой* в  $E$  назовем множество попарно ортогональных элементов  $\{x_n\} \subset E$ .

**Теорема 1.2.** Если  $\{x_k\}_{k=1}^m$  — ортогональная система ненулевых элементов в евклидовом пространстве  $E$ ,  $\{x_k\}_{k=1}^m \subset E$ , то элементы  $\{x_k\}_{k=1}^m$  — линейно независимы.

◀ Допустим противное. Пусть элементы  $\{x_k\}_{k=1}^m$  — линейно зависимы, т. е. существует такой набор чисел  $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$  (не все из них равны нулю), что  $\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k = \theta$ . В силу ортогональности системы  $\{x_k\}_{k=1}^m$  имеем  $\forall j = 1, \dots, m: 0 = \langle x_j, \theta \rangle = \langle x_j, \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle x_j, x_k \rangle = \lambda_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{\neq 0}$ .

Поэтому все коэффициенты  $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$  должны быть нулевыми, а это противоречит допущению о линейной зависимости элементов  $\{x_k\}_{k=1}^m$ . ▶

**Следствие.** В  $n$ -мерном евклидовом пространстве ортогональная система из  $n$  ненулевых элементов образует базис.

В дальнейшем нам понадобятся два свойства скалярного произведения, которые устанавливаются в следующих леммах.

**Лемма 1.4.** (Свойство непрерывности скалярного произведения.) Пусть в евклидовом пространстве  $E$  заданы две сходящиеся последовательности:  $\{x_n\} \subset E, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E, \{y_n\} \subset E, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in E$ . Тогда числовая последовательность  $\langle x_n, y_n \rangle$  также сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$ .

◀ С учетом леммы 1.3 имеем:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \leq \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно, сходящаяся числовая последовательность  $\{\|y_n\|\}$  ограничена, кроме того,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$ . ▶

**Лемма 1.5.** (Равенство параллелограмма.) Для любых элементов  $x, y$  евклидова пространства  $E$  и нормы (1.2) верно:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

$$\blacktriangleleft \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \dots = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Проделайте опущенные выкладки самостоятельно.  $\blacktriangleright$

**Определение.** *Пространством Гильберта* (обычно обозначается  $H$ ) называется евклидово пространство, которое полно в норме (1.2).

**Пример 1.6.** Пространство  $E^n$  арифметических векторов со скалярным произведением, определенным для векторов  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  как  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ , — полное, т. е. гильбертово.

**Пример 1.7.** Гильбертово пространство  $L_2[a, b]$ .

$\blacktriangleleft$  Для функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , заданных на отрезке  $t \in [a, b]$ , определим скалярное произведение как

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

(убедитесь, что аксиомы скалярного произведения выполняются).

В примере 1.5 было рассмотрено пространство  $\tilde{L}_2[0; T]$  непрерывных на отрезке  $t \in [0; T]$  функций с нормой  $\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$  и было показано, что  $\tilde{L}_2[0; T]$  не является полным. Можно также показать, что не является полным и пространство  $\hat{L}_2[0; T]$  кусочно-непрерывных на отрезке  $t \in [0; T]$  функций с нормой, определяемой тем же выражением.

Во многих теоретических вопросах рассматривают обобщение пространств  $\tilde{L}_2[a; b]$  и  $\hat{L}_2[a; b]$  — пространство  $L_2[a, b]$  функций, для которых норма элемента определяется как  $\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$ , но интеграл понимается в смысле Лебега. Определенный интеграл Лебега представляет собой обобщение «традиционного» интеграла Римана и применим к более широкому классу функций. Теория интеграла Лебега выходит за рамки нашего рассмотрения (подробнее см., напр., [45]), отметим лишь, что пространство  $L_2[a; b]$  является полным, а значит, гильбертовым. Кроме того, любой элемент  $x \in L_2[a; b]$  можно с какой угодно точностью  $\varepsilon > 0$  приблизить по норме этого пространства элементом  $\hat{x} \in \hat{L}_2[a; b]$ , т. е. кусочно-непрерывной функцией:  $\|\hat{x} - x\| < \varepsilon$ .

В тех случаях, когда полнота является неотъемлемо важным свойством, необходимо рассматривать пространство  $L_2[a, b]$ .

На практике для описания сигналов обычно ограничиваются множеством кусочно-непрерывных функций  $\hat{L}_2[a; b] \subset L_2[a; b]$ . Тогда при определении скалярного произведения  $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$  и индуцируемой им нормы (1.2) определенный интеграл можно понимать в смысле Римана. ►

Сформулируем задачу аппроксимации, которую будем рассматривать далее. Пусть  $H$  — гильбертово пространство, а  $L$  — подпространство в  $H$ ,  $L \subset H$ . Для заданного элемента  $x \in H$  необходимо найти элемент наилучшего приближения (ЭНП)  $y \in L$ , для которого  $\rho(x, y) = \rho(x, L)$ , т. е.

$$\|x - y\| = \inf_{u \in L} \|x - u\|. \quad (1.3)$$

**Теорема 1.3.** В гильбертовом пространстве существует, и притом единственный, ЭНП  $y \in L$ , который является решением задачи аппроксимации (1.3).

◀ Докажем сначала существование ЭНП. Обозначим  $d = \inf_{u \in L} \|x - u\|$ . Из определения точной нижней грани следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in L: d \leq \|x - u_\varepsilon\| < d + \varepsilon$ . Тогда, взяв числовую последовательность  $\varepsilon_k = 1/k, k = 1, 2, \dots$ , сможем построить последовательность элементов  $\{u_k\} \subset L$  такую, что

$$d \leq \|x - u_k\| < d + \frac{1}{k}.$$

Покажем, что  $\{u_k\}$  — фундаментальная последовательность. С использованием равенства параллелограмма (лемма 1.5) имеем

$$2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 = \|u_m - u_n\|^2 + 4\left\|x - \frac{u_m + u_n}{2}\right\|^2 \geq \|u_m - u_n\|^2 + 4d^2,$$

поскольку элемент  $v = \frac{u_m + u_n}{2} \in L$  и  $\rho(x, v) = \|x - v\| \geq \inf_{u \in L} \|x - u\| = d$ .

Поэтому  $\|u_m - u_n\|^2 \leq 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4d^2$ , и тогда

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2 &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \leq 4\left(d + \frac{1}{N}\right)^2 - 4d^2 = \\ &= \frac{8d}{N} + \frac{4}{N^2} < \frac{8d + 4}{N}, \quad \text{где } N = \min(n, m). \end{aligned}$$

Таким образом, величину  $\|u_m - u_n\|$  можно сделать сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого числа  $N$ , т. е. последовательность  $\{u_k\}$  — фундаментальная, и вследствие полноты  $H$

$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = y \in H$ . Поскольку сходящаяся последовательность  $\{u_k\} \subset L$  и  $L$  — подпространство (т. е. замкнутое множество), то верно также:  $y \in L$ . Поэтому  $\rho(x, y) = d$  и существование ЭНП доказано.

Покажем, что ЭНП  $y$  — единственный. Для этого допустим противное. Пусть наряду с  $y$  существует также другой ЭНП  $\tilde{y} \in L$ , т. е.  $\rho(x, L) = \|x - y\| = \|x - \tilde{y}\| = d$ , причем  $\tilde{y} \neq y$ . На основании равенства параллелограмма (лемма 1.5) получаем:

$$4d^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - \tilde{y}\|^2 = \|y - \tilde{y}\|^2 + 4\left\|x - \frac{y + \tilde{y}}{2}\right\|^2 \geq \|y - \tilde{y}\|^2 + 4d^2,$$

откуда  $\|y - \tilde{y}\|^2 = 0$  и  $y = \tilde{y}$ , т. е. ЭНП — единственный. ►

**Теорема 1.4.** Пусть  $L$  — подпространство в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $y \in L$  — ЭНП для заданного элемента  $x \in H$ . Тогда любой элемент  $u \in L$  ортогонален элементу  $v = x - y$ :  $v \perp u$ , что обозначают также  $v \perp L$ .

◀ Допустим противное, т. е.  $\exists u \in L$ :  $\langle x - y, u \rangle = \sigma \neq 0$ . Тогда  $u \neq \theta$  и (см. аксиому 1° скалярного произведения)  $\langle u, u \rangle > 0$ . Рассмотрим

элемент  $\tilde{y} = y + \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u$ , который также лежит в подпространстве  $L$ :  $\tilde{y} \in L$ , так как  $y \in L, u \in L$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{y}\|^2 &= \left\langle (x - y) - \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u, (x - y) - \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle = \\ &= \langle x - y, x - y \rangle - 2 \left\langle x - y, \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u, \frac{\sigma}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle = \\ &= \|x - y\|^2 - \frac{2\sigma}{\langle u, u \rangle} \underbrace{\langle x - y, u \rangle}_{\sigma} + \frac{\sigma^2}{\langle u, u \rangle^2} \langle u, u \rangle = \|x - y\|^2 - \frac{\sigma^2}{\langle u, u \rangle}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\frac{\sigma^2}{\langle u, u \rangle} > 0$ , то  $\|x - \tilde{y}\|^2 < \|x - y\|^2$  и элемент  $y$  не является ЭНП. Получили противоречие, поэтому  $\forall u \in L$ :  $\langle x - y, u \rangle = 0$ . ►

**Следствие из теорем 1.3, 1.4.** Пусть  $L$  — подпространство в  $H$ . Тогда  $\forall x \in H$  существует единственное разложение  $x = y + z$ , где  $y \in L$ , а  $z \perp L$ .

◀ Пусть  $x = y + z$ , ЭНП  $y \in L$ ,  $z \perp L$ . Пусть существует также другое представление:  $x = a + b$ , где  $a \in L$ ,  $b \perp L$ . Тогда  $y - a + z - b = \theta$ , и

$$\langle y - a + z - b, y - a \rangle = 0 = \langle y - a, y - a \rangle + \langle z, y - a \rangle - \langle b, y - a \rangle = \|y - a\|^2,$$

так как  $(y - a) \in L$ . Поэтому  $y = a$  и  $b = x - y = z$ . ►

ЭНП  $y \in L$  называют также *проекцией* элемента  $x \in H$  на подпространство  $L$ . Для случая  $H = E^3$ ,  $L = E^2$  результат теоремы 1.4 хорошо известен и имеет несложную геометрическую интерпретацию (рис. 1.1).

Теорема 1.4 определяет способ нахождения ЭНП для элемента  $x \in H$  в случае конечной размерности подпространства  $L$  с заданным (не обязательно ортогональным) базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ,  $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$ . Поиск коэффициентов разложения  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  осуществляется следующим образом. Так как

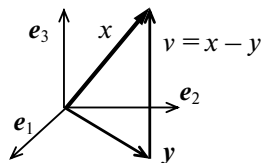


Рис. 1.1

$\forall k: g_k \in L, \langle x - y, g_k \rangle = 0$ , то

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j, g_k \right\rangle = \langle x, g_k \rangle - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle g_j, g_k \rangle = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle g_j, g_k \rangle = \langle x, g_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Определитель системы линейных уравнений (1.4) есть определитель матрицы Грама  $\mathbf{G} = \left\{ \langle g_j, g_k \rangle \right\}_{k,j=1}^n$ , причем  $\det \mathbf{G} \neq 0$  в силу линейной независимости элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . (Напомним, что  $\det \mathbf{G} = 0$  тогда и только тогда, когда элементы  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  линейно зависимы.) Следовательно, система уравнений (1.4) имеет единственное решение — набор коэффициентов  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ , который задает ЭНП  $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$ .

Если же элементы базиса подпространства  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset L$  не только линейно независимы, но и ортогональны, то поиск коэффициентов  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  упрощается (убедитесь самостоятельно):

$$\lambda_j = \frac{\langle x, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle}. \quad (1.5)$$

**Определение.** Пусть  $L$  — подпространство в  $H$ . Совокупность всех элементов из  $H$ , ортогональных к  $L$ ,  $L^\perp = \{x \in H \mid x \perp L\}$ , называется *ортогональным дополнением* подпространства  $L$ .

**Теорема 1.5.** Пусть  $L$  — подпространство в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда  $L^\perp$  также является подпространством в  $H$ .

◀ Нужно доказать, что  $L^\perp$  — замкнутое линейное многообразие.

**Линейность.**  $\forall u \in L, \forall x, y \in L^\perp, \forall \alpha, \beta$  — скаляров:

$$\langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle = 0.$$

То есть для любой линейной комбинации  $z = \alpha x + \beta y$  элементов из  $L^\perp$  имеем:  $z \perp L$ , следовательно,  $z \in L^\perp$  и  $L^\perp$  — линейное многообразие.

**Замкнутость.** Пусть  $z$  — произвольная предельная точка множества  $L^\perp$ . Тогда по теореме 1.1 найдется последовательность  $\{z_n\} \subset L^\perp, z_n \neq z$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ . Имеем  $\forall u \in L: \langle u, z_n \rangle = 0$ , но в силу непрерывности скалярного произведения (лемма 1.4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, u \rangle = \langle z, u \rangle = 0$ . Следовательно,  $z \in L^\perp$  и множество  $L^\perp$  содержит все свои предельные точки, т. е. замкнуто. ►

**Определение.** Будем говорить, что гильбертово пространство  $H$  разлагается в ортогональную сумму подпространств  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , и записывать это как  $H = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ , если:

1) все подпространства  $L_1, L_2, \dots, L_n$  попарно ортогональны, т. е.

$$\forall u \in L_i, \forall v \in L_j: \langle u, v \rangle = 0 \text{ при } i \neq j.$$

2)  $\forall x \in H$  существует разложение  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ , где  $x_i \in L_i$ .

Заметим, что если  $L$  — подпространство в гильбертовом пространстве  $H$ , то  $H = L \oplus L^\perp$ , что вытекает непосредственно из определения  $L^\perp$ , теорем 1.3–1.5 и их следствий.

**Теорема 1.6.** Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  задано конечномерное подпространство  $L$  с ортогональным базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , а  $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$  — ЭНП для заданного элемента  $x \in H$ . Тогда для ошибки приближения — вектора  $x - y$  справедливы равенства:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|g_j\|^2.$$

◀ Поскольку  $\langle x - y, y \rangle = 0$  (см. теорему 1.4), то  $\langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle = \|y\|^2, \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$ , причем  $\|y\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j, \sum_{m=1}^n \lambda_m g_m \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{m=1}^n \lambda_m \langle g_j, g_m \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|g_j\|^2$ . ►

Пусть теперь в  $H$  задана бесконечная последовательность ненулевых ортогональных векторов  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ . Это означает, что  $H$  — бесконечномерное пространство, так как ортогональные элементы линейно независимы. Рассматривая первые элементы  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  как базис, получаем некоторое линейное многообразие  $L_n$ , «натянутое» на  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ . Можно показать, что  $L_n$  — замкнуто, т. е. является подпространством. Так как  $L_n$  — конечномерно, то с учетом теоремы 1.6 для



заданного элемента  $x \in H$  и его ЭНП  $y_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j$ ,  $y_n \in L_n$ , имеем:

$$\|x - y_n\|^2 = \|x\|^2 - \|y_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2. \quad (1.6)$$

Числовая последовательность  $s_n = \|y_n\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2$  ограничена сверху, так как  $\forall n \ s_n = \|x\|^2 - \|x - y_n\|^2 \leq \|x\|^2$ , и является неубывающей ( $s_{n+1} \geq s_n$ ). Поэтому  $\{s_n\}$  — сходится. Сходимость последовательности частичных сумм  $\{s_n\}$  означает сходимость ряда  $s = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2$ , причем (см. (1.6))

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2 \leq \|x\|^2. \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) называется *неравенством Бесселя*.

**Определения.** Ортогональная система  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  называется *полной* в гильбертовом пространстве  $H$ , если  $\forall x \in H$  существует разложение:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k, \quad (1.8)$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k\| = 0$ . Ряд (1.8) называется *рядом Фурье* (по ортогональной системе  $\{\varphi_k\}$ ), а числа  $\{\lambda_k\}$  — *коэффициентами Фурье*.

**Теорема 1.7.** Пусть  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  — полная ортогональная система в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда  $\forall x \in H$  для коэффициентов Фурье  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  верна формула (1.5).

◀ Обозначим частичную сумму  $x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k$ . В силу непрерывности скалярного произведения и ортогональности системы  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle x, g_j \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, g_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k, g_j \right\rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle g_k, g_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle g_k, g_j \rangle = \lambda_j \langle g_j, g_j \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует формула (1.5). ▶

**Теорема 1.8.** Ортогональная система  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  является полной в гильбертовом пространстве  $H$  тогда и только тогда, когда  $\forall x \in H$  неравенство (1.7) выполняется как равенство:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2,$$

которое называется *равенством Парсеваля — Стеклова*.

◀ Действительно, понятие полной системы  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  означает, что

$$\forall x \in H: \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \quad \text{и} \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \right\|^2 = 0,$$

что эквивалентно равенству  $\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\varphi_j\|^2 = 0$ , которое получается предельным переходом  $n \rightarrow \infty$  в соотношении (1.6). ▶

Важнейшим примером гильбертова пространства является пространство функций  $L_2[a, b]$  (см. пример 1.7). При этом под  $L_2(\mathbb{R}) = L_2(-\infty; \infty)$  будем понимать пространство всех функций, интегрируемых с квадратом на всей числовой оси.

### 1.3. Примеры ортогональных систем в пространстве $L_2$

Элементами в векторном пространстве  $L_2$  являются функции. Приведем ряд примеров ортогональных функциональных базисов  $\{\varphi_k\}$ , которые нашли широкое применение для обработки сигналов.

**Пример 1.8.** Тригонометрическая система функций  $\left\{ 1, \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k=1}^{\infty}$  является полной в пространстве  $L_2[a, a+T]$  на любом отрезке  $t \in [a; a+T]$  длины  $T$ .

**Пример 1.9.** Система ортогональных многочленов Лежандра  $\{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n)$ , является полной в пространстве  $L_2[-1, 1]$ .

При цифровой обработке сигналов использование алгебраических многочленов для представления сигналов часто бывает более предпочтительным по сравнению с тригонометрическими функциями, так как реализация вычислений последних обычно более сложна. В этой связи еще более интересны базисы кусочно-постоянных функций.

**Пример 1.10.** Систему функций Радемахера  $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  определим следующим образом. Для  $x \in [0, 1)$  положим

$$r_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0; 1/2) \\ -1 & \text{при } x \in [1/2; 1) \end{cases}$$

и периодически продолжим  $r_0(x)$  на всю числовую ось с периодом  $T=1$ . Остальные функции системы определим так:  $r_k(x) = r_0(2^k x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (см. рис. 1.2).

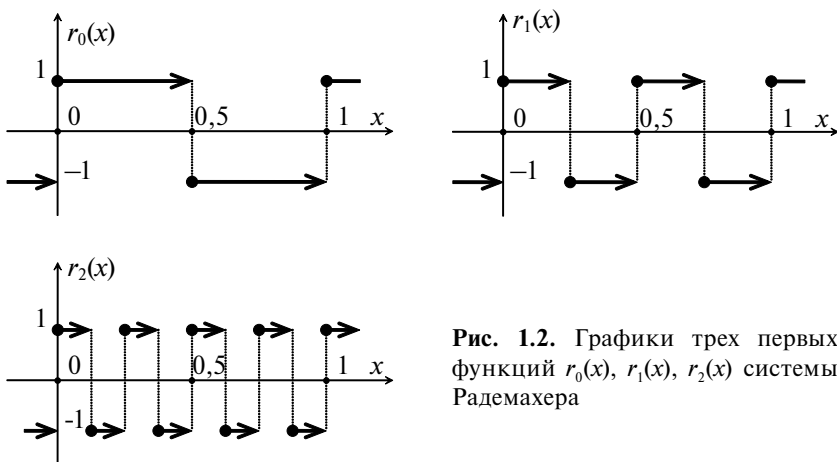


Рис. 1.2. Графики трех первых функций  $r_0(x)$ ,  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$  системы Радемахера

Для дальнейшего изложения удобно использовать следующее обозначение:  $\Delta_m^n = \left[ \frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Тогда из определения функций Радемахера и приведенных иллюстраций видны следующие свойства данной системы.

1°. Кусочное постоянство.  $\forall x \in \Delta_m^{k+1}$ :  $r_k(x) = \text{const} = (-1)^m$ .

На более мелких подынтервалах, естественно, функции также постоянны:

$$\forall k \geq 0, \forall j \geq k+1, \forall x \in \Delta_m^j: r_k(x) = \text{const}. \quad (1.9)$$

2°. Интеграл по периоду функции  $r_k(x)$  равен нулю. Поэтому  $\forall m \in \mathbb{Z}$   $\int_{\Delta_m^k} r_k(x) dx = 0$  (как интеграл по одному периоду  $T = |\Delta_m^k| = 2^{-k}$ ) и

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall j = 0, \dots, k: \int_{\Delta_m^j} r_k(x) dx = 0, \quad (1.10)$$

как интеграл по  $N$  периодам,  $N = \left| \Delta_m^j \right| / \left| \Delta_m^k \right| = 2^{-j} / 2^{-k} = 2^{k-j}$ .

3°. Система функций  $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$  — ортонормирована на отрезке  $x \in [0, 1]$ .

◀ Очевидно,  $\forall k: \langle r_k, r_k \rangle = \int_0^1 (r_k(x))^2 dx = 1$ , т. е. функции нормированы. Покажем, что  $\forall m \neq k: \langle r_k, r_m \rangle = \int_0^1 r_k(x)r_m(x)dx = 0$ . Пусть для определенности  $k > m$ , тогда:

$$\langle r_k, r_m \rangle = \int_{\Delta_0^k} r_k(x)r_m(x)dx = \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{\Delta_j^k} r_k(x) \underbrace{r_m(x)}_{\substack{c(m,k,j) \\ \text{см. (1.9)}}} dx = \sum_{j=0}^{2^k-1} \underbrace{c(m,k,j)}_{\pm 1} \underbrace{\int_{\Delta_j^k} r_k(x)dx}_{=0, \text{ см. (1.10)}} = 0. \blacktriangleright$$

Таким образом, система функций  $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$  является ортонормированной, но она не является базисом в пространстве  $L_2[0, 1]$ , поскольку не является полной.

**Упражнение.** Покажите самостоятельно по схеме, аналогичной доказательству свойства 3°, что ненулевой элемент  $f(x) = r_0(x)r_1(x)$ ,  $\|f(x)\| = 1$ ,  $f(x) \in L_2[0, 1]$ , является ортогональным любой из функций Радемахера, т. е.  $\forall k: \langle f, r_k \rangle = 0$ . Следовательно, система  $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$  — неполная и не является базисом в  $L_2[0, 1]$ .

**Пример 1.11.** Систему функций Уолша  $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$  определим следующим образом. Представим целое число  $n \geq 0$  в виде двоичного разложения:  $n = \sum_{k=0}^{l(n)} n_k 2^k$ ,  $n_k \in \{0, 1\}$ . Тогда функции системы Уолша выражаются при помощи функций Радемахера следующим образом:

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^l (r_k(x))^{n_k} = \prod_{k: n_k=1} r_k(x), \tag{1.11}$$

где конечное число  $l = l(n)$  определяется номером  $n$  функции Уолша,  $n \leq 2^{l+1} - 1$ . Таким образом, функция Уолша  $w_n(x)$  определяется как произведение функций Радемахера с номерами, которые соответствуют единичным коэффициентам в двоичном разложении числа  $n$ . При этом если все коэффициенты  $\{n_k\}$  двоичного разложения равны нулю, то считаем последнее произведение в (1.11) равным единице, т. е.  $w_0(x) = 1$ . Поясним определение системы

$n$	$n_2$	$n_1$	$n_0$	$w_n(x)$
0	0	0	0	$w_0(x) = 1$
1	0	0	1	$w_1(x) = r_0(x)$
2	0	1	0	$w_2(x) = r_1(x)$
3	0	1	1	$w_3(x) = r_0(x)r_1(x)$
4	1	0	0	$w_4(x) = r_2(x)$

$\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$  построением ее первых функций, см. таблицу. График функции  $w_3(x) = r_0(x)r_1(x)$  приведен на рис. 1.3.

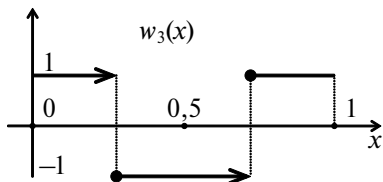


Рис. 1.3. Функция Уолша  $w_3(x)$

**Замечание.** Очевидно, что функции системы Уолша имеют период  $T = 1$ .

**Упражнение.** Постройте самостоятельно по определению (1.11) графики функций  $w_3(x), \dots, w_7(x)$ .

**Теорема 1.9.** Система функций Уолша (1.11) — ортонормирована на интервале  $x \in [0, 1)$ .

◀ Очевидно, что  $\forall n: \langle w_n, w_n \rangle = 1$ . Пусть теперь  $k \neq n$ :

$$\langle w_k, w_n \rangle = \int_0^1 \prod_{j:k_j=1} r_j(x) \prod_{j:n_j=1} r_j(x) dx = \int_0^1 \prod_{j:k_j=n_j=1} (r_j(x))^2 \prod_{j:n_j \neq k_j} r_j(x) dx = \int_0^1 \prod_{j:n_j \neq k_j} r_j(x) dx.$$

Поскольку  $n \neq k$  и поэтому не все коэффициенты  $n_j, k_j$  одинаковы, то в полученном подынтегральном произведении имеется по крайней мере один сомножитель. Положим  $\tilde{j} = \max_{n_j \neq k_j} j$  и продолжим преобразования.

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_n \rangle &= \int_0^1 r_{\tilde{j}}(x) \prod_{\substack{j:n_j \neq k_j \\ j < \tilde{j}}} r_j(x) dx = \sum_{m=0}^{2^{\tilde{j}}-1} \int_{\Delta_m^{\tilde{j}}} r_{\tilde{j}}(x) \overbrace{\prod_{\substack{j:n_j \neq k_j \\ j < \tilde{j}}} r_j(x)}^{\text{константа } c(k,n,m), \text{ см. (1.9)}} dx = \\ &= \sum_{m=0}^{2^{\tilde{j}}-1} \underbrace{c(k,n,m)}_{\pm 1} \underbrace{\int_{\Delta_m^{\tilde{j}}} r_{\tilde{j}}(x) dx}_{=0, \text{ см. (1.10)}} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Теорема 1.10.** Система Уолша (1.11) является полной в пространстве  $L_2[0, 1]$ . (Примем утверждение теоремы без доказательства.)

Так как функции системы Уолша принимают лишь два значения  $\pm 1$ , они очень удобны для программных вычислений и для аппаратной реализации в цифровой аппаратуре.

**Пример 1.12.** Систему функций Хаара  $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$  определим на полуинтервале  $x \in [0, 1)$  следующим образом. Положим  $h_0(x) = 1$ . Для  $n > 0$  номер базисной функции  $h_n(x)$  представим в виде:  $n = 2^k + m$ ,

где целые числа  $k \geq 0, 0 \leq m \leq 2^k - 1$  однозначно определяются по номеру  $n > 0$ . Тогда

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_{2^m}^{k+1} \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_{2^{m+1}}^{k+1} \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_m^k = \Delta_{2^m}^{k+1} \cup \Delta_{2^{m+1}}^{k+1} \end{cases} \quad (1.12)$$

Приведем графики первых функций системы  $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$ , см. рис. 1.4.

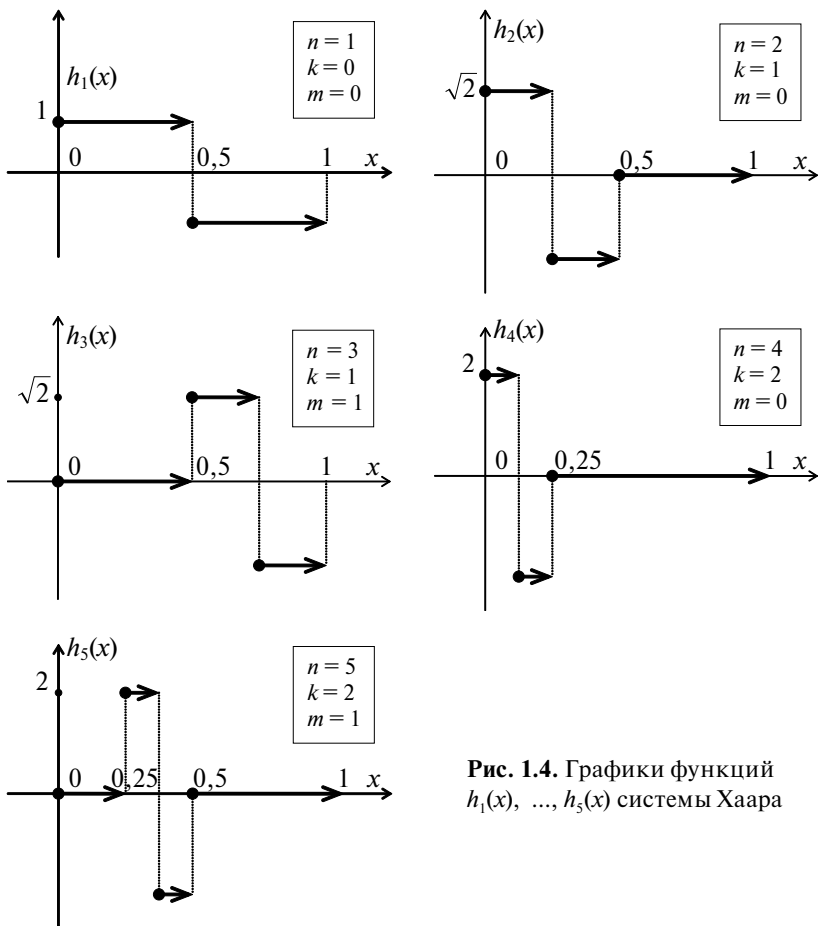


Рис. 1.4. Графики функций  $h_1(x), \dots, h_5(x)$  системы Хаара

Рассмотренным ранее свойствам системы Радемахера во многом аналогичны следующие очевидные свойства системы Хаара ( $n > 0$ ,  $n = 2^k + m$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq m \leq 2^k - 1$ ).

$$1^\circ. \forall j \geq k+1, \forall l \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}, \forall x \in \Delta_l^j:$$

$$h_n(x) = \text{const} \in \{0, -2^{k/2}, 2^{k/2}\}.$$

$$2^\circ. \forall j \in \{0, \dots, k\}, \forall l \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}: \int_{\Delta_l^j} h_n(x) dx = 0.$$

**Теорема 1.11.** Система функций Хаара (1.12) — ортонормирована на интервале  $x \in [0; 1]$ .

◀ В соответствии с определением (1.12)

$$\langle h_n(x), h_n(x) \rangle = \int_{\Delta_m^k} 2^{k/2} 2^{k/2} dx = 1, \text{ где } n = 2^k + m.$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение  $\langle h_n(x), h_v(x) \rangle$ , где  $n = 2^k + m$ ,  $v = 2^\gamma + \mu$ , причем  $n \neq v$ . Возможны два случая.

Случай 1. Пусть  $k \neq \gamma$ , для определенности положим  $k \geq \gamma + 1$ . Тогда

$$\langle h_n(x), h_v(x) \rangle = \sum_{l=0}^{2^k-1} \int_{\Delta_l^k} h_n(x) \underbrace{h_v(x)}_{\substack{c(v,k,l)=\text{const} \\ \forall x \in \Delta_l^k}} dx = \sum_{l=0}^{2^k-1} c(v,k,l) \underbrace{\int_{\Delta_l^k} h_n(x) dx}_0 = 0,$$

как следует из приведенных выше свойств системы Хаара.

Случай 2. Пусть  $\gamma = k$ , но  $m \neq \mu$ . Так как (см. (1.12))  $h_n(x) = 0$  при  $x \notin \Delta_m^k$ ,  $h_v(x) = 0$  при  $x \notin \Delta_\mu^k$ , то  $\forall x \in [0; 1]$   $h_n(x)h_v(x) = 0$ , поскольку для  $m \neq \mu$  имеем:  $\Delta_m^k \cap \Delta_\mu^k = \emptyset$ . Поэтому вновь  $\langle h_n(x), h_v(x) \rangle = 0$ . Таким образом, система Хаара является ортонормированной. ▶

**Теорема 1.12.** Система Хаара (1.12) является полной в пространстве  $L_2[0, 1]$ . (Примем утверждение теоремы без доказательства.)

**Упражнение.** Разложите функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/4; 1/2) \\ 2, & x \in [1/2; 3/4) \\ 0, & x \notin [1/4; 3/4) \end{cases}$$

в ряд Фурье по системам Хаара и Уолша. Проверьте выполнение равенства Парсеваля.

## 1.4. Тригонометрические ряды Фурье. Явление Гиббса

Напомним следующую теорему.

**Теорема 1.13.** Если функция  $f(t)$  имеет период  $T$  и является кусочно-гладкой, то ее ряд Фурье<sup>1</sup> сходится к функции  $f(t)$  в каждой точке ее непрерывности и к значению  $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$  в точках разрыва, т. е.

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right), \quad (1.13)$$

где коэффициенты Фурье находятся по формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left( \frac{2\pi k}{T} t \right) dt, \quad k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left( \frac{2\pi k}{T} t \right) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Упражнение.** Убедитесь, что формулы (1.14) являются частным случаем (1.5) для  $f \in L_2[-T/2; T/2]$ , см. также пример 1.8.

Теорема 1.13 определяет условия *поточечной сходимости* ряда Фурье, т. е. те условия, при выполнении которых периодическая функция  $f(t)$  может быть *точно* представлена рядом (1.13) в каждой точке числовой оси  $t \in \mathbb{R}$ . Так как система ортогональных функций  $\{1, \cos(2\pi kt/T), \sin(2\pi kt/T)\}_{k=1}^{\infty}$  является полной в гильбертовом пространстве  $L_2$  на любом отрезке длины  $T$  (см. пример 1.8), то последовательность частичных сумм

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T))$$

сходится в норме (1.2), т. е.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - f_N(t)\| = 0$ , и для  $f(t)$  содержит в смысле этой нормы элементы наилучшего приближения из конечномерных подпространств с базисами  $\{1, \cos(2\pi kt/T), \sin(2\pi kt/T)\}_{k=1}^N$ .

<sup>1</sup> Если не говорится, какая система функций рассматривается в виде базиса для построения ряда Фурье (см. раздел 1.2), то традиционно подразумевается тригонометрическая система.



В целом ряде практических приложений ЦОС помимо нормы (1.2) приближение  $T$ -периодических функций частичными суммами ряда Фурье (1.13) рассматривается в смысле нормы  $\|x\| = \max |x(t)|$  (максимального уклонения). Мы встретимся с такими задачами далее в главе 4. В случае если аппроксимируемая функция  $f(t)$  является разрывной, поведение частичных сумм  $f_N(t)$  ряда Фурье (1.13) характеризуется «всплесками», дающими максимальное уклонение  $\delta = |f(t) - f_N(t)|$  именно вблизи точек разрыва. Причем величина этого максимального уклонения практически не зависит от количества слагаемых в частичной сумме. Рассмотрим это явление, известное как *эффeкт Гиббса*, на примере.

**Пример 1.13.** Для следующей функции периода  $T = 2\pi$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & -\pi/2 < x < \pi/2, \\ -1/2, & -\pi \leq x < -\pi/2 \text{ или } \pi/2 < x \leq \pi, \\ 0, & x = -\pi/2 \text{ или } x = \pi/2, \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi),$$

оценить величину  $A_K = \max_{x \in [-\pi; \pi]} |f_K(x)|$ , где  $f_K(x)$  —  $K$ -я частичная сумма ряда Фурье (1.13), для больших значений  $K \gg 1$ .

◀ Так как заданная функция  $f(x)$  является четной, то

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2\pi kx/T) dx = 0. \quad \text{Очевидно также, что}$$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ . Поэтому ряд (1.13) также является четной функцией, принимая вид  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ , где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(kx) dx - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(kx) dx \right) = \frac{2}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2}. \end{aligned}$$

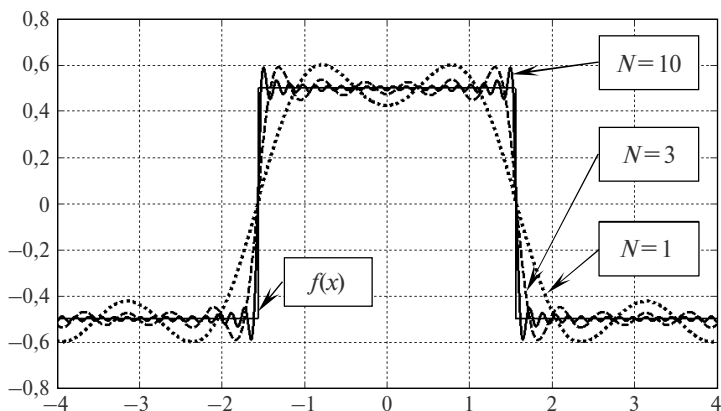
Учитывая, что для четных значений  $k = 2n$  коэффициенты ряда  $a_{2n} = 0$ , а для нечетных индексов  $a_{2n-1} = \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)}$ , для ряда Фурье заданной функции получаем следующее представление:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos((2n-1)x).$$

Запишем его  $K$ -ю частичную сумму, полагая число  $K = 2N$  (четным):

$$f_{2N}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos((2n-1)x)$$

и построим графики данной функции (см. рис. 1.5) для значений  $N = 1, 3, 10$ . С увеличением числа  $N$  происходит приближение пика отклонения значения частичной суммы к точке разрыва аппроксимируемой функции  $f(x)$ , но видимого изменения абсолютной величины  $A_{2N} = \max_{x \in [-\pi; \pi]} |f_{2N}(x)|$  с увеличением  $N$  на графиках не наблюдается.



**Рис. 1.5.** Графики значений частичной суммы ряда Фурье  $f_{2N}(x)$  для функции  $f(x)$  (тонкая сплошная линия) из примера 1.13

В силу четности функций  $f(x)$  и  $f_{2N}(x)$  достаточно рассмотреть их на половине периода, для значений аргумента  $x \in [0; \pi]$ . Для определения точки максимального отклонения  $A_{2N} = \max_{x \in [-\pi; \pi]} |f_{2N}(x)|$  частичной суммы  $f_{2N}(x)$  найдем ее локальные экстремумы, ближайшие к разрыву  $f(x)$  в точке  $x = \pi/2$ . Эти локальные экстремумы, как видно из графиков, соответствуют глобальным экстремумам частичной суммы  $f_{2N}(x)$ .

Иследуем производную частичной суммы:

$$\begin{aligned} f'_{2N}(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \sin((2n-1)x) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N (-1)^{2n-1} \sin((2(2n-1)-1)x) + (-1)^{2n} \sin((2(2n)-1)x) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \sin((4n-1)x) - \sin((4n-3)x) = \frac{4 \sin x}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos((2n-1)2x), \end{aligned}$$

так как  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \cos((2n-1)2x) &= \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^N e^{i(2n-1)2x} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{-i2x} \sum_{n=1}^N e^{i4nx} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( e^{i2x} \frac{e^{i4Nx} - 1}{e^{i4x} - 1} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{i2x} \frac{e^{i2Nx} (e^{i2Nx} - e^{-i2Nx})}{e^{i2x} (e^{i2x} - e^{-i2x})} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2Nx} \sin(2Nx)}{\sin(2x)} \right) = \frac{\cos(2Nx) \sin(2Nx)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(4Nx)}{2 \sin(2x)}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$f'_{2N}(x) = \frac{2 \sin(x) \sin(4Nx)}{\pi \sin(2x)}.$$

Экстремумы частичной суммы  $f_{2N}(x)$  удовлетворяют условию  $f'_{2N}(x) = 0$ . Ближайшие к точке разрыва  $x = \pi/2$  экстремумы  $f_{2N}(x)$  являются глобальными, выбираем их из общего набора решений уравнения  $\sin(4Nx) = 0$ :  $x_k = \frac{\pi k}{4N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Очевидно, что это две точки  $x_{2N \mp 1} = \frac{\pi(2N \mp 1)}{4N} = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4N}$ , лежащие слева (максимум  $f_{2N}(x)$ ) и справа (минимум  $f_{2N}(x)$ ) от разрыва  $f(x)$ .

Найдем значения частичной суммы в точках глобальных экстремумов  $x_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4N}$  и  $x_{\min} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4N}$ :

$$f_{2N} \left( \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4N} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \left( \frac{\pi(2n-1)}{2} \mp \frac{\pi(2n-1)}{4N} \right).$$

Воспользуемся соотношением  $\cos(\alpha \mp \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$ , тогда

$$\begin{aligned} &\cos \left( \frac{\pi(2n-1)}{2} \mp \frac{\pi(2n-1)}{4N} \right) = \\ &= \underbrace{\cos \frac{\pi(2n-1)}{2}}_0 \cos \frac{\pi(2n-1)}{4N} \pm \underbrace{\sin \frac{\pi(2n-1)}{2}}_{(-1)^{n-1}} \sin \frac{\pi(2n-1)}{4N} = \pm (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi(2n-1)}{4N}, \\ f_{2N} \left( \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4N} \right) &= \pm \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{\pi(2n-1)}{4N} = \pm \sum_{n=1}^{2N} \left( \sin \frac{\pi(2n-1)}{4N} / \frac{\pi(2n-1)}{4N} \right) \frac{1}{2N}. \end{aligned}$$

Полученное выражение представляет собой интегральную сумму, в данном случае совпадающую с квадратурной формулой прямоугольников, для интеграла  $\pm \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ . Поэтому при

достаточно больших значениях  $N$  для частичных сумм ряда Фурье получаем наибольшие отклонения от оси абсцисс

$$f_{2N}\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4N}\right) \approx \pm \lim_{N \rightarrow \infty} f_{2N}\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4N}\right) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \pm 0,589490.$$

Соответствующий интеграл (так называемый интегральный синус) находится численно, например, как сумма быстро сходящегося знакопеременного ряда:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n-1)!(2n-1)} \approx 1,851937.$$

Как видим, с увеличением количества  $2N$  слагаемых в частичной сумме  $f_{2N}(x)$  ряда Фурье ее «пики» не уменьшаются, но приближаются к точке разрыва:

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4N} \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0, \quad x_{\min} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4N} \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0.$$

Амплитуда пиков  $A_{2N} = \max_{x \in [-\pi; \pi]} |f_{2N}(x)| \approx 0,589490$ , а отклонение от  $f(x)$ :

$$\delta_{2N} = |f(x_{\max}) - f_{2N}(x_{\max})| = |f(x_{\min}) - f_{2N}(x_{\min})| = A_{2N} - 0,5 \approx 0,08949.$$

Размах пульсации частичной суммы вблизи точки  $x = \pi/2$  составляет величину  $2A_{2N} = f_{2N}(x_{\max}) - f_{2N}(x_{\min}) \approx 1,17898$ , т.е. примерно на 18 % больше «скачка»

$$\left| f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right| = 1$$

функции  $f(x)$  в точке разрыва  $x = \pi/2$ . ►

Рассмотренный в примере 1.13 частный случай явления Гиббса может быть обобщен [52] на случай произвольной (разрывной) функции  $f(t)$ , представимой в виде ряда Фурье (1.13). Вблизи точек разрыва  $\{t_k\}$  величина максимальных пульсаций частичных сумм  $f_k(t)$  ряда (1.13) практически не изменяется с увеличением количества слагаемых  $K$  в частичной сумме, и размах пульсации составляет величину около 118 % от величины «скачка»  $|f(t_k + 0) - f(t_k - 0)|$ . С увеличением количества слагаемых  $K$  в частичной сумме ряда Фурье пики уклонения  $f_k(t)$  от аппроксимируемой функции  $f(t)$  приближаются к точкам разрыва.

**Упражнение.** Покажите, что для точек  $\{x_{\text{extr}}\}$  локальных экстремумов частичной суммы ряда Фурье  $f_k(x) = f_{2N}(x)$  из примера 1.13, которые

являются ближайшими на оси абсцисс к найденным в примере 1.13 точкам глобальных экстремумов, при  $N \gg 1$  верна оценка:

$$f_{2N}(x_{\text{extr}}) \approx \pm \lim_{N \rightarrow \infty} f_{2N}(x_{\text{extr}}) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \pm 0,451412.$$

(Это означает, что вторые по величине пики уклонений частичной суммы  $|f(x_{\text{extr}}) - f_{2N}(x_{\text{extr}})| \approx 0,5 - 0,451412 = 0,048588$  примерно вдвое меньше максимальных отклонений  $\delta_{2N} \approx 0,08949$ .) Как изменяется положение на оси абсцисс точек  $\{x_{\text{extr}}\}$  с увеличением количества слагаемых  $K = 2N$  в частичной сумме  $f_K(x) = f_{2N}(x)$ ?

Вместо (1.13) часто удобнее использовать комплексную форму ряда Фурье:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} t}, \quad (1.15)$$

где

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt. \quad (1.16)$$

Несложно убедиться, что для вещественной функции  $f(t)$  комплексные коэффициенты (1.16) ряда (1.15) обладают свойством сопряженной симметрии:  $c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$ ,  $c_k = (a_k - ib_k)/2 = \bar{c}_{-k}$ , где вещественные коэффициенты  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  находятся по формулам (1.14).

**Упражнение.** Для функции единичного периода  $f(t) = f(t+1)$ , где  $f(t) = t$  при  $t \in [-1/2; 1/2)$ , найдите разложение в ряд Фурье в форме (1.13) и (1.15).

## 1.5. Интеграл Фурье

Реальные сигналы чаще всего представляют собой аперiodические функции, искусственная периодизация которых, необходимая для корректного использования разложений (1.13) или (1.15), представляет собой неоднозначную процедуру, приводящую к искажению сигнала. Поступим следующим образом. Обозначим  $v_k = k/T$ ,  $\Delta v_k = v_{k+1} - v_k = 1/T = \Delta v$ , тогда с использованием данных обозначений из (1.15) и (1.16) получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(u) \exp(-i2\pi v_k u) du \right) e^{i2\pi v_k t} \Delta v_k.$$

Далее непериодический сигнал представим как периодический с бесконечно большим периодом, см. рис. 1.6.



Рис. 1.6. Переход от периодического сигнала к непериодическому

Предположим, что существует интеграл (см. (1.16))

$$S(v_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} c_k T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} f(u) e^{-i\frac{2\pi k}{T}u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi v_k u} du.$$

При формальном переходе к пределу при  $T \rightarrow \infty$  из ряда (1.15) получим:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(v_k) e^{i2\pi v_k t} \Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \exp(2\pi i v t) dv.$$

В случае существования последнего интеграла он понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \exp(2\pi i v t) dv = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} S(v) \exp(2\pi i v t) dv.$$

Данный интеграл носит название *интеграла Фурье*. Условия, которые гарантируют возможность представления функции в виде интеграла Фурье, определяет следующая теорема.

**Теорема 1.14.** Пусть функция  $f(t)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$ , является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке  $t \in [a, b] \subset (-\infty; \infty)$  и в точках разрыва  $f(t) = (f(t+0) + f(t-0))/2$ . Тогда она представима в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} S(v) \exp(2\pi i v t) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) e^{2\pi i v t} dv, \quad (1.17)$$

где

$$S(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i v t} dt. \quad (1.18)$$

При этом  $S(v)$  является непрерывной функцией.

Функция  $S(v)$  из (1.18) носит название *частотного спектра*, или *спектральной плотности*, или *спектральной характеристики*

функции (сигнала)  $f(t)$ . Представления (1.18) и (1.17) называют соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье сигнала  $f(t)$ . Их записывают также с использованием в качестве аргумента спектральной плотности циклической частоты  $\omega = 2\pi\nu$ :

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.14 сигнал можно описать как во *временной области*, т.е. через функцию времени  $f(t)$ , так и в *частотной области*, через функцию частоты  $S(\nu)$ , оба представления взаимно однозначно соответствуют друг другу:  $f(t) \leftrightarrow S(\nu)$  (или  $f(t) \leftrightarrow \hat{S}(\omega)$ ).

Отметим ряд важных свойств интегрального преобразования Фурье.

1°. Сопряженная симметрия. Для любой вещественной функции  $f(t)$ :  $S(\nu) = \overline{S(-\nu)}$ . (Докажите самостоятельно.)

2°. Линейность.  $\forall x(t) \leftrightarrow S_x(\nu)$ ,  $\forall y(t) \leftrightarrow S_y(\nu)$ ,  $\forall \alpha, \beta$ :  
 $f(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow S(\nu) = \alpha S_x(\nu) + \beta S_y(\nu)$ .

3°. Изменение масштаба.  $\forall f(t) \leftrightarrow S(\nu)$ ,  $\forall \alpha > 0$ :

$$f(\alpha t) \leftrightarrow S_\alpha(\nu) = \frac{1}{\alpha} S(\nu / \alpha).$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft S_\alpha(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-2\pi i \frac{\nu}{\alpha} (\alpha t)} d(\alpha t) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i (\nu/\alpha) u} du = \frac{1}{\alpha} S(\nu / \alpha). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

4°. Задержка сигнала.  $\forall f(t) \leftrightarrow S(\nu)$ ,  $\forall t_0$ :  $f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-2\pi i \nu t_0} S(\nu)$ . (Докажите самостоятельно.)

5°. Сдвиг спектра.  $\forall f(t) \leftrightarrow S(\nu)$ ,  $\forall \alpha$ :  $f(t) e^{2\pi i \alpha t} \leftrightarrow S(\nu - \alpha)$ . (Докажите самостоятельно.)

6°. Свертка сигналов.  $\forall u(t) \leftrightarrow S_u(\nu)$ ,  $\forall w(t) \leftrightarrow S_w(\nu)$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) w(x - t) dt \leftrightarrow S(\nu) = S_u(\nu) S_w(\nu).$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft S(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} u(t) w(x - t) dt \right) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(x - t) e^{-2\pi i \nu x} dx}_{\text{см. свойство 4}^\circ} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) S_w(\nu) e^{-2\pi i \nu t} dt = S_u(\nu) S_w(\nu). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

7°. Произведение сигналов.  $\forall u(t) \leftrightarrow S_u(v), \quad \forall w(t) \leftrightarrow S_w(v):$

$$f(t) = u(t)w(t) \leftrightarrow S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x)S_w(v-x)dx.$$

(Докажите по аналогии с доказательством свойства 6°.)

8°. Равенство Парсеваля.  $\forall f(t) \leftrightarrow S(v):$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv$$

(величину  $E$  называют *энергией сигнала*).

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft E &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \int_{-\infty}^{\infty} S(v)e^{2\pi ivt} dv dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{2\pi ivt} dt dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{-2\pi ivt} dt dv = \int_{-\infty}^{\infty} S(v)\overline{S(v)}dv = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

9°. Дифференцирование во временной области. Если  $f(t) \leftrightarrow S(v)$  и функция  $f(t)$  дифференцируема, причем  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , то

$$f'(t) \leftrightarrow 2\pi ivS(v).$$

◀ Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2\pi ivt} dt = \underbrace{f(t)e^{-2\pi ivt}}_0 \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi iv)f(t)e^{-2\pi ivt} dt = 2\pi ivS(v). \quad \blacktriangleright$$

10°. Дифференцирование в частотной области. Если  $f(t) \leftrightarrow S(v)$  и функция  $S(v)$  дифференцируема, причем  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} S(v) = 0$ , то

$$-2\pi itf(t) \leftrightarrow S'(v).$$

(Докажите самостоятельно, аналогично доказательству свойства 9°.)

**Упражнение.** Покажите, что для функции и ее спектра  $f(t) \leftrightarrow S(v)$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \text{условие} \quad \left. \frac{d^m}{dv^m} S(v) \right|_{v=0} = 0 \quad \text{эквивалентно} \quad \text{условию} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t) dt = 0.$$

**Упражнение.** Сформулируйте свойства 1°–10° пары преобразований Фурье  $f(t) \leftrightarrow \hat{S}(\omega)$ , записанных для циклической частоты  $\omega$ .

**Определение.** Амплитудным спектром сигнала  $f(t)$  называется модуль  $|S(v)|$  спектральной плотности  $S(v)$ , а фазовым спектром — главное значение ее аргумента  $\varphi(v) = \arg S(v) \in (-\pi, \pi]$ .



Амплитудный и фазовый спектры позволяют записать спектральную плотность в показательной форме:  $S(\nu) = |S(\nu)|e^{i\varphi(\nu)}$ . Если  $S(\nu) = 0$ , то значение  $\varphi(\nu)$  не определено.

**Замечания.** Из свойства 4° следует, что сдвиги сигнала во временной области влияют в частотной области лишь на фазовый спектр, но не изменяют амплитудный спектр сигнала. Из свойства 1° следует, что для вещественных сигналов амплитудный спектр является четной, а фазовый спектр — нечетной функцией.

**Пример 1.14.** Найти амплитудный и фазовый спектры сигнала, представляющего собой прямоугольный импульс длительности  $T$ :

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T}, & \text{при } t \in [0, T] \\ 0, & \text{при } t \notin [0, T] \end{cases}.$$

◀ Найдем сначала спектральную плотность функции  $g(t) = f(t+0,5T)$ :

$$S_g(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i\nu t} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-2\pi i\nu t} dt = \frac{e^{\pi i\nu T} - e^{-\pi i\nu T}}{2\pi i\nu\sqrt{T}} = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}},$$

где, очевидно,  $S_g(0) = \sqrt{T}$ . Так как  $f(t) = g(t - 0,5T)$ , то на основании свойства 4° получаем

$$S_f(\nu) = e^{-\pi i\nu T} \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}},$$

откуда амплитудный спектр

$$|S_f(\nu)| = \left| \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}} \right|.$$

Для фазового спектра  $\varphi(\nu)$  рассмотрим сначала частоты  $\nu > 0$ .

При  $\nu = k/T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\arg S_f(\nu)$  не определен, так как  $S_f(\nu) = 0$ .

При  $\nu \in (2k/T; (2k+1)/T)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , получаем:  $|\sin(\pi\nu T)| = \sin(\pi\nu T)$ ,

$$S_f(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}} e^{-\pi i\nu T} = \left| \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}} \right| e^{-\pi i\nu T} = |S_f(\nu)| e^{i\varphi(\nu)}, \quad \text{т. е.}$$

$$\varphi(\nu) = \arg(e^{-\pi i\nu T}), \quad \text{причем } \varphi(\nu) = \varphi\left(\nu + \frac{2}{T}\right).$$

При  $\nu \in ((2k+1)/T; (2k+2)/T)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , имеем:

$$|\sin(\pi\nu T)| = -\sin(\pi\nu T),$$

$$S_f(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}} e^{-i\pi\nu T} = - \left| \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu\sqrt{T}} \right| e^{-i\pi\nu T} = |S_f(\nu)| e^{i\varphi(\nu)}, \quad \text{т. е.}$$

$$e^{i\varphi(\nu)} = -e^{-i\pi\nu T} = e^{-i\pi\nu T + i\pi},$$

$$\varphi(\nu) = \arg\left(e^{-i\pi(\nu T - 1)}\right), \quad \text{и вновь} \quad \varphi(\nu) = \varphi\left(\nu + \frac{2}{T}\right).$$

В силу полученной периодичности фазового спектра для положительных частот  $\nu > 0$  достаточно привести один период  $\varphi(\nu)$ . Для  $\nu \in (0; 2/T)$  имеем:

$$\varphi(\nu) = \begin{cases} -\pi\nu T, & \text{при } \nu \in (0; 1/T) \\ -\pi\nu T + \pi, & \text{при } \nu \in (1/T; 2/T) \end{cases}$$

Так как  $S_f(0) = \sqrt{T}$ , то  $\varphi(0) = 0$ . Вид функции  $\varphi(\nu)$  для  $\nu < 0$  находим на основании того, что фазовый спектр является нечетной функцией.

Графики амплитудного и фазового спектров приведены на рис. 1.7. ▶

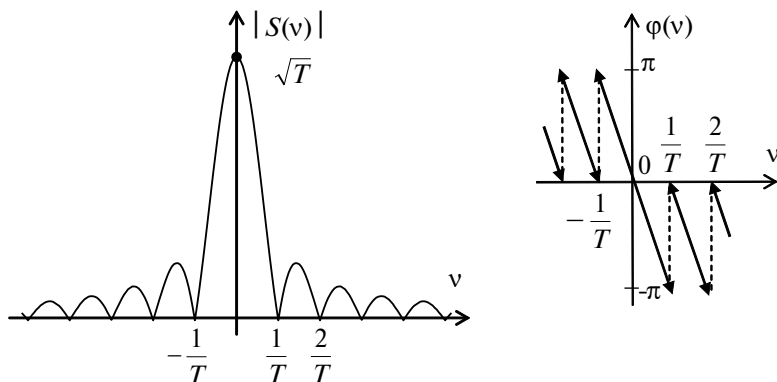


Рис. 1.7. Графики амплитудного (слева) и фазового (справа) спектров сигнала из примера 1.14

**Упражнение.** Используя свойства  $2^\circ$ – $4^\circ$  преобразования Фурье и результаты решения примера 1.14, найдите амплитудный и фазовый спектры функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0) \\ -1, & x \in [0; 1) \\ 0, & x \notin [-1; 1) \end{cases}.$$

## 1.6. Принцип неопределенности время-частотного представления сигналов

**Определение.** Носителем  $\Omega$  функции  $f(x)$  назовем замыкание множества аргументов  $x$ , при которых  $f(x)$  принимает ненулевые значения, т. е.  $\Omega = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$ . Обозначаем:  $\Omega = \text{supp } f(x)$ . Будем говорить, что функция имеет *ограниченный* (или *компактный*) носитель, если существует конечный отрезок  $[a, b]$ , полностью содержащий этот носитель:  $\text{supp } f(x) \subset [a, b]$ .

Например, носителем функции  $h_5(x)$  системы Хаара (см. пример 1.12) является отрезок  $x \in [1/4; 1/2]$ .

**Теорема 1.15.** Пусть выполнены условия теоремы 1.14 и ненулевые функции  $f(t)$  и  $S(v)$  связаны соотношениями (1.17) и (1.18). Тогда пара функций  $f(t) \leftrightarrow S(v)$  не может одновременно иметь ограниченные носители.

◀ Допустим противное, т. е. ненулевые функции  $f(t) \leftrightarrow S(v)$  имеют ограниченные носители одновременно. Тогда существуют конечные отрезки  $[-a; a] \supset \text{supp } f(t)$ ,  $[-b; b] \supset \text{supp } S(v)$  и интегралы (1.17), (1.18) можно записать в виде:

$$f(t) = \int_{-b}^b S(v) e^{2\pi i vt} dv, \quad S(v) = \int_{-a}^a f(t) e^{-2\pi i vt} dt.$$

На основании теоремы 1.14 спектральная плотность  $S(v)$  является непрерывной функцией, поэтому согласно теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, существуют интегралы:

$$f^{(n)}(t) = \int_{-b}^b \frac{\partial^n}{\partial t^n} (S(v) e^{2\pi i vt}) dv = (2\pi i)^n \int_{-b}^b v^n S(v) e^{2\pi i vt} dv,$$

$n = 0, 1, \dots$ , так как подынтегральные функции непрерывны по переменной  $v$  и по параметру  $t$  на множестве  $\{(t, v) \mid v \in [-b; b], t \in \mathbb{R}\}$ .

Таким образом, функция  $f(t)$  в каждой точке  $t_0 \in (-\infty; \infty)$  имеет производные любого порядка и, следовательно, может быть представлена рядом Тейлора:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n.$$

Так как  $f(t)$  имеет ограниченный носитель, найдется некоторый отрезок  $t \in [c; d]$ , для которого  $f(t) \equiv 0$ . Для любой внутренней точки этого отрезка, например его середины  $t_0 = (c+d)/2$ , имеем  $f^{(n)}(t_0) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , и разложение в ряд Тейлора дает  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \underbrace{f^{(n)}(t_0)}_{\equiv 0}.$$

Мы получили противоречие условию  $f(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , следовательно, функция  $f(t)$  и ее спектр  $S(v)$  не могут одновременно иметь ограниченный носитель. ►

Из теоремы 1.15 следует, что сигналы конечной длительности имеют неограниченную *частотную полосу* (т.е. носитель спектральной плотности). Так, в примере 1.14 мы рассматривали функцию, имеющую конечный носитель во временной области,  $\text{supp } f(t) = [0; T]$ , и видели, что в частотной области носитель спектра  $S(v) = e^{-\pi i v T} \frac{\sin \pi v T}{\pi v \sqrt{T}}$  совпадает со всей числовой осью,  $\text{supp } S(v) = (-\infty; \infty)$ . Однако на практике почти всегда необходимо задаваться требованиями ограниченной (конечной) частотной полосы. То есть для произвольного сигнала (функции)  $f(t)$  необходимо каким-то образом определить его частотную полосу  $v \in [v_1; v_2]$ , вполне характеризующую сигнал в частотной области. Под *шириной полосы* спектра тогда понимается величина  $\Delta v = v_2 - v_1$ .

Единого строгого подхода для определения частотной полосы сигнала, реально имеющего бесконечную ширину спектра, нет. На практике обычно выбирают на оси частот такой отрезок  $v \in [v_1; v_2]$ , который содержит основную часть  $E_{\Delta v}$  энергии сигнала  $E$ , т.е.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv \approx E_{\Delta v} = \int_{v_1}^{v_2} |S(v)|^2 dv.$$

Разность  $E - E_{\Delta v}$  характеризует величину тех искажений, которые связаны с искусственным «усечением» полосы. Действительно, если обозначить усеченный спектр

$$\check{S}(v) = \begin{cases} S(v), & \text{при } v \in [v_1; v_2] \\ 0, & \text{при } v \notin [v_1; v_2] \end{cases}$$

и соответствующий ему искаженный сигнал  $\check{f}(t)$ , то, очевидно, в силу свойства 2° преобразования Фурье имеем  $S(v) - \check{S}(v) \leftrightarrow f(t) - \check{f}(t)$ , а на основании свойства 8° энергия ошибки  $\varepsilon(t) = f(t) - \check{f}(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \check{f}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v) - \check{S}(v)|^2 dv = \\ = \int_{-\infty}^{v_1} |S(v)|^2 dv + \int_{v_2}^{\infty} |S(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} |S(v)|^2 dv - \int_{v_1}^{v_2} |S(v)|^2 dv = E - E_{\Delta v}.$$

Так, для сигнала из примера 1.14 в качестве полосы сигнала можно было бы взять отрезок  $v \in [-1/T; 1/T]$  (тогда  $E_{\Delta v}/E \approx 0,90$ ) или  $v \in [-2/T; 2/T]$  (тогда  $E_{\Delta v}/E \approx 0,95$ ).

Для пояснения принципа неопределенности время-частотного представления сигналов более удобен иной подход к определению ширины полосы в частотной области и длительности сигнала во временной области. Положим, что энергия вещественного сигнала единичная, т.е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 1$ . Тогда по своему физическому смыслу функция  $\rho(v) = |S(v)|^2$  представляет собой плотность распределения энергии в частотной области, причем для вещественных сигналов  $\rho(v) = \rho(-v)$  в силу свойства 1° преобразования Фурье. Поэтому для первого начального момента (среднего значения распределения энергии в частотной области) всегда получим

$$m_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v |S(v)|^2 dv = 0$$

в силу того, что подынтегральная функция нечетна. Локализацию энергии в частотной области можно характеризовать по величине второго центрального момента

$$D_v = \int_{-\infty}^{\infty} (v - m_v)^2 |S(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 |S(v)|^2 dv, \quad (1.19)$$

который представляет собой меру «разброса» энергии в частотной области относительно  $m_v$ . Величина  $\sqrt{D_v}$ , определяемая из выражения (1.19), представляет собой среднеквадратичное значение распределения энергии в частотной области, поэтому естественно назвать соответствующую частотную полосу  $v \in [-\sqrt{D_v}, \sqrt{D_v}]$  среднеквадратичной частотной полосой, ширина которой  $\Delta v = 2\sqrt{D_v}$ .

Во временной области функцией плотности распределения энергии сигнала является  $\gamma(t) = |f(t)|^2$ . Аналогично, в качестве меры

длительности сигнала возьмем удвоенную величину среднеквадратичной длительности  $\Delta t = 2\sqrt{D_t}$ , определяемую по значению второго центрального момента

$$D_t = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m_t)^2 |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt - m_t^2, \quad (1.20)$$

где  $m_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt$  — среднее значение для распределения энергии сигнала во временной области. Будем также называть величины  $\Delta\nu = 2\sqrt{D_\nu}$  и  $\Delta t = 2\sqrt{D_t}$ , определенные при помощи формул (1.19) и (1.20), *эффективными* значениями ширины полосы  $\Delta\nu$  и длительности  $\Delta t$  сигнала соответственно.

Величины (1.19) и (1.20) характеризуют локализацию энергии сигнала: чем меньше среднеквадратичная полоса (длительность), тем выше концентрация энергии в частотной (временной) области. *Принцип неопределенности* гласит, что добиться высокой локализации энергии одновременно и во временной, и в частотной областях невозможно. Так, верна следующая теорема.

**Теорема 1.16.** Для дифференцируемых вещественных сигналов  $f(t)$  единичной энергии таких, что сходится интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt$  и  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t(f(t))^2 = 0$ , произведение ширины полосы  $\Delta\nu = 2\sqrt{D_\nu}$  и длительности  $\Delta t = 2\sqrt{D_t}$  ограничено снизу:

$$\Delta t \Delta\nu \geq 1/\pi. \quad (1.21)$$

◀ Пусть, для упрощения изложения, во временной области имеем  $m_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt = 0$  (в необходимых случаях выполняется сдвиг сигнала по оси времени,  $f(t) \rightarrow f(t + m_t)$ , не изменяющий его амплитудный спектр, см. свойство 4° преобразования Фурье).

Поскольку  $f'(t) \leftrightarrow 2\pi i\nu S(\nu)$  (см. свойство 9°), на основании равенства Парсеваля (свойство 8°) имеем:  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 dt = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 d\nu$ . Тогда

$$D_\nu D_t = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \|f'(t)\|^2 \|tf(t)\|^2,$$

где норма вещественной функции индуцирована скалярным произведением  $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$  (см. раздел 1.2). Так как на основании неравенства Коши — Буняковского (лемма 1.3)

$$\|f'(t)\| \|tf(t)\| \geq \left| \langle f'(t), tf(t) \rangle \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) tf(t) dt \right|, \text{ то}$$

$$\Delta\nu\Delta t = 4\sqrt{D_\nu D_t} \geq \frac{2}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) f(t) dt \right| = \frac{1}{\pi} \left| \underbrace{t(f(t))^2}_{0-0} \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt}_{1} \right| = \frac{1}{\pi} \blacktriangleright$$

**Упражнение.** Покажите, что для сигнала с энергией  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$  оценка (1.21) принимает следующий общий вид:  $\Delta t \Delta \nu \geq E/\pi$ .

**Пример 1.15.** Показать, что равенство в оценке (1.21) достигается для гауссова импульса, т. е. для функции вида  $f(t) = C e^{-kt^2}$ , где  $C, k$  — некоторые константы ( $k > 0$ ).

◀ Достаточно рассмотреть случай единичной энергии сигнала, положив  $C = \sqrt[4]{2k/\pi}$  — убедитесь, что в этом случае энергия сигнала  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 1$ , учитывая значение интеграла Пуассона  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt = \sqrt{2\pi}$ . Для упрощения выкладок проведем доказательство только для  $k = 1/4$ , т. е. для несложно обобщаемого с использованием свойства 3° преобразования Фурье на другие значения  $k > 0$  случая  $f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{-t^2/4}$ . Поскольку  $\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-t^2/2) dt = 1$  (как выражение для дисперсии стандартного нормального закона), то и для эффективной длительности сигнала во временной области также получаем  $D_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = 1$ , т. е.  $\Delta t = 2\sqrt{D_t} = 2$ .

Для производной спектральной плотности имеем:

$$\begin{aligned} S'(v) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/4} e^{-2\pi i vt} (-2\pi i t) dt = \frac{4\pi i}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vt} d(e^{-t^2/4}) = \\ &= \frac{4\pi i}{\sqrt[4]{2\pi}} \left( \underbrace{e^{-2\pi i vt - (t^2/4)}}_{0-0} \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/4} (-2\pi i v) e^{-2\pi i vt} dt \right) = -8\pi^2 v S(v). \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее дифференциальное уравнение:  $d(\ln S(v))/dv = -8\pi^2 v$ , интегрируя которое находим:  $S(v) = N e^{-4\pi^2 v^2}$ , где нормировочная константа  $N$  определяется из равенства Парсеваля:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(v)|^2 dv = \frac{N^2}{4\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(4\pi v)^2}{2}} d(4\pi v)}_{\sqrt{2\pi}} = N^2/\sqrt{8\pi}.$$

Окончательно, получаем спектральную плотность  $S(\nu) = \sqrt[4]{8\pi} e^{-4\pi^2\nu^2}$ . Тогда для эффективной полосы имеем:

$$D_\nu = \sqrt{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 e^{-8\pi^2\nu^2} d\nu = \frac{\sqrt{8\pi}}{4\pi(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(4\pi\nu)^2 e^{-(4\pi\nu)^2/2}}_{\sqrt{2\pi}} d(4\pi\nu) = \frac{1}{(4\pi)^2}.$$

Отсюда  $\Delta\nu = 2\sqrt{D_\nu} = \frac{1}{2\pi}$  и  $\Delta\nu\Delta t = 1/\pi$ . ►

**Упражнение.** Используя свойства 2° и 3° интеграла Фурье и результаты примера 1.15, убедитесь, что для произвольного числа  $k > 0$  гауссову импульсу  $f(t) = \sqrt[4]{2k/\pi} e^{-kt^2}$  соответствует спектр  $S(\nu) = \sqrt[4]{2\pi/k} e^{-\pi^2\nu^2/k}$ .

Заметим, что для сигнала любой формы его «сжатие» по аргументу во временной области приводит к такому же масштабному «растяжению» по аргументу в частотной области, см. свойство 3° преобразования Фурье. Построив прямоугольную систему координат, осями которой являются время и частота, каждому сигналу на полученной плоскости «Время×Частота» можно поставить в соответствие некоторую прямоугольную область  $\Omega$  локализации сигнала с длинами сторон  $\Delta t$  и  $\Delta\nu$ . При этом, если понимать  $\Delta t$  и  $\Delta\nu$  в смысле эффективных значений, то для сигнала единичной энергии площадь данной области в соответствии с теоремой 1.16 не может быть меньше величины  $1/\pi$ .

**Пример 1.16.** Изобразить на плоскости «Время×Частота» область  $\Omega = \Delta t \times \Delta\nu$  локализации сигнала из примера 1.14 для эффективных значений полосы и длительности.

◀ Во временной области получаем среднее значение распределения энергии:

$$m_t = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T t dt = \frac{T}{2},$$

а для эффективной длительности:

$$D_t = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt - m_t^2 = \int_0^T \frac{t^2}{T} dt - \frac{T^2}{4} = \frac{T^2}{12}, \text{ откуда } \Delta t = 2\sqrt{D_t} = T/\sqrt{3}.$$

В частотной области

$$D_\nu = \lim_{F \rightarrow \infty} \int_{-F}^F \nu^2 |S(\nu)|^2 d\nu = \lim_{F \rightarrow \infty} \int_{-F}^F \nu^2 \frac{\sin^2 \pi\nu T}{T(\pi\nu)^2} d\nu = \infty,$$



т. е. эффективная полоса сигнала в данном случае неограничена:  $\nu \in (-\infty; \infty)$ . Область  $\Omega = \Delta t \times \Delta \nu$  отражена на рис. 1.8. ►

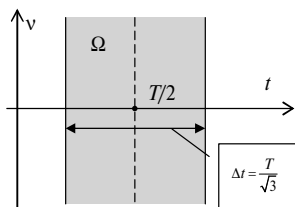


Рис. 1.8. Время-частотная локализация функции из примера 1.14

## 1.7. Обобщенное преобразование Фурье

Введем сначала важное для многих теоретических вопросов цифровой обработки сигналов понятие  $\delta$ -функции Дирака. Положим для  $\tau > 0$ :

$$u_\tau(t) = \begin{cases} 1/\tau, & \text{при } t \in [-\tau/2; \tau/2] \\ 0, & \text{при } t \notin [-\tau/2; \tau/2] \end{cases}.$$

Тогда для любой непрерывной функции  $f(t)$  на основании интегральной теоремы о среднем найдется такая точка  $\xi \in [-\tau/2; \tau/2]$ , что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_\tau(t) f(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} f(t) dt = f(\xi).$$

Поэтому если  $f(t)$  — непрерывная в окрестности точки  $t = 0$  функция, то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_\tau(t) f(t) dt = f(0).$$

Обозначим формально  $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} u_\tau(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{при } t = 0 \\ 0, & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$  и будем называть  $\delta(t)$  *дельта-функцией Дирака* (или  $\delta$ -функцией). Основное свойство  $\delta$ -функции описывается равенством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_\tau(t) f(t) dt = f(0),$$

где  $f(t)$  — непрерывная в точке  $t = 0$  функция.

При выполнении условий теоремы 1.14 между сигналом и его спектром существует взаимно однозначное соответствие:

$$S(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i vt} dt \leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) e^{2\pi i vt} dv.$$

Рассмотрим функцию  $g(t) = 1$ . Условия теоремы 1.14, очевидно, для нее не выполнены, и спектр  $S_g(v)$ , т.е. понимаемый в традиционном смысле интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vt} dt$ , не существует. Однако если положить, что  $S_g(v) = \delta(v)$ , то с учетом рассмотренного выше свойства  $\delta$ -функции запись обратного преобразования Фурье не вызывает затруднений и дает точное восстановление функции  $g(t)$ :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(v) e^{2\pi i vt} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v) e^{2\pi i vt} dv = 1.$$

Для того чтобы расширить класс функций, для которых применимо интегральное преобразование Фурье (1.18), положим, по определению, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vt} dt = \delta(v). \quad (1.22)$$

Замечание. Эквивалентными соотношению (1.22) являются следующие определения. В силу вещественности  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i vt} dt = \overline{\delta(v)} = \delta(v).$$

В силу симметрии выражения (1.22) относительно переменных  $v$  и  $t$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i vt} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vt} dv = \delta(t).$$

Покажем, что интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vt} dt$  действительно проявляет свойства дельта-функции. Пусть  $\varphi(t)$  — некоторая непрерывная в окрестности точки  $t = 0$  функция, отвечающая условиям теоремы 1.14. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i vt} dv \right) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i vt} dt \right) dv = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi}(v) dv = \varphi(0),$$

что соответствует основному свойству  $\delta$ -функции:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$ .

Вводя в рассмотрение представление (1.22), мы сразу же расширили область применимости интегральных преобразований (1.17) и (1.18), превратив ряды Фурье для периодических функций ((1.15), (1.16)) в частный случай интегральных преобразований. Действительно, исходя из (1.22), функции  $\varphi_k(t) = e^{i \frac{2\pi}{T} kt}$  соответствует обобщенный спектр

$$S_{\varphi_k}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt} e^{-2\pi i vt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \left(v - \frac{k}{T}\right)} dt = \delta\left(v - \frac{k}{T}\right).$$

Поэтому для произвольной функции периода  $T$ , представимой в виде ряда (1.15),  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \varphi_k(t)$ , обобщенное интегральное преобразование дает спектр

$$S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \right) e^{-2\pi i vt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-2\pi i vt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(v - \frac{k}{T}\right),$$

по которому функция может быть восстановлена в результате обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(v - \frac{k}{T}\right) \right) e^{2\pi i vt} dv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left( \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{k}{T}\right) e^{2\pi i vt} dv \right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t). \end{aligned}$$

Таким образом, интегралы в преобразовании Фурье (1.17) и (1.18) мы будем далее понимать обобщенно. Для обозначения преобразования Фурье будем использовать следующие сокращенные записи:

$$S(v) = \mathcal{F}\{f(t)\} \text{ — прямое преобразование (1.18),}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(v)\} \text{ — обратное преобразование (1.17).}$$

**Определение.** Решетчатой будем называть функцию вида  $g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \delta(x - m\Delta x)$ , где  $\{g_m\}$  — вещественные или комплексные числа, а константа (шаг аргумента)  $\Delta x > 0$ .

Из рассмотренного выше следует важное наблюдение: если функция (сигнал)  $f(t)$  является  $T$ -периодической, то ее спектр  $S(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(v - \frac{k}{T}\right)$  является решетчатой функцией и принимает ненулевые значения лишь для определенных равноотстоящих значений аргумента  $v$ , а именно  $v_k = k/T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, спектр периодических функций полностью характеризуется набором коэффициентов (1.16) ряда (1.15):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \leftrightarrow S(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(v - \frac{k}{T}\right). \quad (1.23)$$

По этой причине под амплитудным спектром для периодических функций понимают набор модулей коэффициентов Фурье  $\{|c_k|\}$ , а под фазовым спектром — набор их аргументов  $\{\arg c_k\}$ .

**Упражнение.** Найдите обобщенный спектр функций  $\cos t, \sin t$ .

Преобразования (1.17) и (1.18) имеют сходную природу, отличающуюся только знаком при мнимом показателе подынтегральной экспоненты. Вследствие этого преобразования (1.17), (1.18) обладают и сходными дуальными свойствами, которые мы уже наблюдали. Например, произведению функций соответствует свертка в области преобразований (см. свойства 6°, 7° интеграла Фурье). Установив, что  $T$ -периодическому сигналу соответствует решетчатый спектр с дискретным шагом частоты  $\Delta\nu = 1/T$ , мы можем ожидать, что для решетчатых функций вида  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t - k\Delta t)$ , принимающих ненулевые значения лишь для равноотстоящих значений дискретного аргумента  $t_k = k\Delta t$ , в частотной области спектр  $S(\nu)$  имеет период, равный  $1/\Delta t$ . То есть периодическая функция в одной области соответствует решетчатой функции в другой области, и наоборот.

**Упражнение.** Используя свойства 2° и 4° преобразования Фурье, покажите, что спектр решетчатой функции  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t - k\Delta t)$  имеет вид  $S(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-2\pi i \nu k \Delta t} = S\left(\nu + \frac{1}{\Delta t}\right)$ .

Установленное выше влияние периодического или решетчатого характера функции на свойства ее преобразования Фурье делает практически очевидным вывод, что периодическая решетчатая функция имеет спектр, который также представляет собой решетчатую периодическую функцию. Убедимся в этом.

**Пример 1.17.** Найти спектр функции  $f(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t - k\Delta t)$ , где  $f_k = f_{k+N}$ .

◀ Очевидно, что функция  $f(t) = f(t + T)$ , где период  $T = N\Delta t$ :

$$f(t + N\Delta t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t - (k - N)\Delta t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{k+N}}_{=f_k} \delta(t - k\Delta t) = f(t).$$

На основании (1.23) ее спектр представляет собой решетчатую функцию  $S(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\nu - k\Delta\nu)$ , где  $\Delta\nu = 1/T$ , причем

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\Delta t/2}^{T-\Delta t/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt = \frac{\Delta t}{T} \int_{-\Delta t/2}^{(N-\frac{1}{2})\Delta t} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \delta(t - m\Delta t) \right) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt =$$

Учитываем  $m: m\Delta t \in \left[-\frac{\Delta t}{2}, (N-\frac{1}{2})\Delta t\right]$