



# М В И З Р С В Я З И

Ю.А. Чернов

Специальные вопросы  
распространения  
радиоволн в сетях связи  
и радиовещания

ТЕХНОСФЕРА

Москва  
2018

УДК 621.37  
ББК 32.84  
Ч49

*Рецензент: д.т.н., профессор Быховский М.А.*

**Ч49 Чернов Ю.А.**

**Специальные вопросы распространения радиоволн  
в сетях связи и радиовещания**

**М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. – 688 с. ISBN 978-5-94836-503-9**

В книге в девяти главах рассматриваются вопросы дифракции и рассеяния радиоволн, исправление угловых спектров локационных радиосигналов от ближайших планет, статистические характеристики освещенных участков случайной поверхности и ряд других прикладных вопросов. Рассматривается работа ВЧ радиолиний в различных ионосферных и географических условиях, рассмотрены вопросы многолучевости, случайных и регулярных девиаций направления прихода сигналов в масштабе Земного шара, работа приэкваториальных и северных радиолиний и ряд других вопросов. В главе о средних волнах рассматриваются вопросы статистических характеристик земной волны в диапазоне НЧ-СЧ, сезонные изменения напряженности поля в дневное время в НЧ-, СЧ-диапазонах, а также выбросы и замирания в ионосферных НЧ-, СЧ-каналах. Подробно рассматривается надежность радиовещания как основной показатель работы радиолиний и систем произвольного назначения. Рассматриваются начальные исследования нелинейных эффектов в ионосфере, давшие толчок к оценке порога повышения мощности излучения, изучается работа антенн, для которых сформулированы несколько теорем об оптимальных антеннах в случайной среде. Рассмотрены особенности работы, достоинства и недостатки цифровых систем радиовещания в полосах частот до 30 МГц, которым, кроме основной главы, уделено также значительное место для анализа в публицистическом изложении этого важного и сложного направления.

**УДК 621.37  
ББК 32.84**

© 2018, Чернов Ю.А.

© 2018, АО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», оригинал-макет, оформление

**ISBN: 978-5-94836-503-9**

# Содержание

|  |     |
|--|-----|
| <b>Введение</b> .....  | 8   |
| <b>Несколько слов об авторе</b> .....  | 11  |
| <b>Глава 1</b>   |     |
| <b>Дифракция и рассеяние радиоволн</b> .....   | 13  |
| 1.1. Об одном противоречии в теории дифракции .....  | 13  |
| 1.2. О связи между распределением метеорных тел по массе и автокорреляционной функцией взрыхленной ими поверхности планеты ..... | 16  |
| 1.3. Спектральная плотность случайной последовательности подобных возмущений .....   | 27  |
| 1.4. Уточнение выражений для поля, рассеянного шероховатой поверхностью .....  | 31  |
| 1.5. Эквивалентность полных и приведенных фазовых набегов в задачах о рассеянии волн .....                                       | 35  |
| 1.6. Скорректированные угловые спектры локационных радиосигналов, отраженных Луной .....   | 41  |
| 1.7. Статистические характеристики освещенных участков случайной поверхности .....   | 46  |
| 1.8. Учет рассеяния от земной поверхности при расчете КВ-радиолиний....  | 60  |
| <b>Глава 2</b>   |     |
| <b>Распространение ВЧ-радиоволн и работа каналов</b> .....   | 79  |
| <b>Общие вопросы</b>   |     |
| 2.1. Несколько теорем об эквивалентном скачке при ионосферном распространении радиоволн .....                                    | 80  |
| 2.2. Об изменении азимутальных углов прихода при глубоких провалах напряженности поля коротких волн на односкачковой трассе..... | 83  |
| 2.3. О некоторых погрешностях в уравнении Эшпльтона–Бэйнона для расстояния скачка .....  | 84  |
| 2.4. Исследование стационарности огибающей КВ-сигнала .....  | 89  |
| 2.5. Оценка многолучевости КВ-сигнала по результатам импульсного наклонного зондирования .....                                   | 97  |
| 2.6. О каустиках на коротковолновых односкачковых радиолиниях.....   | 100 |
| 2.7. Статистические характеристики напряженности поля КВ в области границы мертвой зоны .....                                    | 103 |
| 2.8. Поле дециметровых радиоволн в мертвой зоне первого скачка .....   | 108 |

|  |  |            |
|--|--|------------|
| 2.9.   | Экспериментальные исследования девиации пеленгов коротковолновых сигналов .....                                | 116        |
| 2.10.  | Особенности работы среднеширотных коротковолновых радиолиний большой протяженности .....                       | 142        |
| 2.11.  | Роль бокового распространения в переносе энергии на декаметровых субавроральных трассах .....                  | 151        |
| 2.12.  | К вопросу о зависимости качества КВ-канала связи от условий распространения.....                               | 160        |
| 2.13.  | Расчет распределений углов прихода лучей на односкачковых коротковолновых трассах.....                         | 166        |
| 2.14.  | Влияние наклонов отражающего слоя ионосферы на характеристики сигналов возвратно-наклонного зондирования ..... | 172        |
| 2.15.  | Энергетический расчет коротковолновых радиолиний.....  | 180        |
| 2.16.  | Особенности частотной зависимости ослабления на протяженных трассах .....                                      | 188        |
| 2.17.  | Применение теоремы об эквивалентном скачке к расчету МПЧ на коротковолновых неоднородных трассах .....         | 196        |
| 2.18.  | Исследование работы приэкваториальных декаметровых радиолиний ....   | 202        |
| 2.19.  | Некоторые особенности работы приполярных КВ-радиолиний .....   | 208        |
| <b>Статистические свойства медленных замираний</b> |  |            |
| 2.20.  | Распределения медленных замираний ВЧ-сигнала вблизи максимальной применимой частоты .....                      | 217        |
| 2.21.  | Природные распределения медленных замираний напряженности поля на коротких волнах .....                        | 226        |
| 2.22.  | Экспериментальные характеристики медленных замираний декаметрового сигнала .....                               | 233        |
| <b>Покрывание территорий</b>                       |  |            |
| 2.23.  | Крупномасштабные неравномерности облучения земной поверхности на декаметровых радиотрассах .....               | 246        |
| 2.24.  | Исследование зоны обслуживания зенитной антенной .....   | 254        |
| 2.25.  | Распределение поля коротковолнового сигнала в городе и его окрестностях.....                                   | 261        |
| 2.26.  | Статистические характеристики первой мертвой зоны при ионосферном распространении декаметровых радиоволн.....  | 263        |
| 2.27.  | О пространственной корреляции поля коротких волн при наклонном отражении от ионосферы.....                     | 267        |
| 2.28.  | Корреляционная функция фазы случайного нормального процесса ...  | 280        |
| <b>Глава 3</b>                                     |  |            |
| <b>Средние и длинные волны .....</b>               |  | <b>285</b> |
| 3.1.   | Статистические характеристики земной волны в диапазоне НЧ/СЧ .....   | 285        |
| 3.2.   | Сезонные изменения напряженности поля земной волны в дневное время в НЧ/СЧ-диапазонах .....                    | 292        |
| 3.3.   | Распространение средних волн в городской среде .....   | 300        |
| 3.4.   | Распределение уровней сигнала земной волны в зоне обслуживания на средних частотах.....                        | 308        |

|                                       |  |            |
|---------------------------------------|--|------------|
| 3.5.                                  | Выбросы и замирания в ионосферных НЧ/СЧ-каналах.....   | 321        |
| 3.6.                                  | Эффективность вещания на длинных волнах.....   | 333        |
| 3.7.                                  | Прогресс в изучении распространения средних, длинных<br>и сверхдлинных радиоволн .....   | 347        |
| <b>Глава 4</b>                        |  |            |
| <b>Надежность .....</b>               |  | <b>365</b> |
| 4.1.                                  | Надежность радиовещания .....  | 365        |
| 4.2.                                  | Некоторые приложения теории надежности сетей радиовещания<br>к анализу экспериментальных результатов .....                                       | 386        |
| 4.3.                                  | Надежность передачи программы радиовещания при одновременном<br>использовании нескольких частотных каналов .....                                 | 395        |
| 4.4.                                  | Необходимое число частотных каналов в высокочастотном диапазоне<br>для передачи одной радиовещательной программы с заданной<br>надежностью ..... | 401        |
| 4.5.                                  | Надежность приема программы при наличии конкурирующих сетей<br>радиовещания .....  | 408        |
| 4.6.                                  | Оценка надежности по малому числу измерений .....  | 415        |
| <b>Синхронная работа радиостанций</b> |  |            |
| 4.7.                                  | Надежность синхронного радиовещания на декаметровых волнах ....  | 421        |
| 4.8.                                  | Исследование допустимой частотной расстройки синхронных<br>передатчиков в ВЧ-радиовещании.....   | 425        |
| 4.9.                                  | Синхронная работа двух радиовещательных ВЧ-передатчиков<br>на опытных трассах .....  | 430        |
| 4.10.                                 | Экспериментальное исследование синхронной работы трех и четырех<br>передатчиков в декаметровой сети радиовещания.....                            | 437        |
| <b>Глава 5</b>                        |  |            |
| <b>Нелинейные явления .....</b>       |  | <b>443</b> |
| 5.1.                                  | К вопросу о нелинейных свойствах ионосферы в практике<br>коротковолнового вещания.....   | 443        |
| 5.2.                                  | Спектрально-частотные характеристики мощного и пробного<br>сигналов НЗ на близких частотах .....   | 450        |
| 5.3.                                  | Проявление наклонного радионагрева в данных вертикального<br>зондирования ионосферы.....   | 457        |
| 5.4.                                  | Изменение амплитуды пробных сигналов и ионограмм НЗ при<br>воздействии на ионосферу мощного наклонного радиоизлучения.....                       | 459        |
| <b>Глава 6</b>                        |  |            |
| <b>Работа антенн .....</b>            |  | <b>464</b> |
| 6.1.                                  | Влияние неоднородностей ионосферы на работу передающих<br>КВ-антенн .....  | 464        |
| 6.2.                                  | Напряженность поля на ДКМ-трассах при использовании различных<br>передающих антенн .....   | 474        |
| 6.3.                                  | Азимутальное распределение напряженности поля на большом<br>удалении от передающей КВ-антенны .....  | 486        |



|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.4. | Сравнительная эффективность коротковолновых синфазных антенн при работе на морской многоскачковой трассе ..... | 490 |
| 6.5. | Работа ВЧ-антенн при случайных углах прихода сигнала.....  | 494 |
| 6.6. | Эллиптическая поляризация волн на КВ-трассах .....   | 505 |
| 6.7. | Теоремы об оптимальных антеннах .....  | 510 |

## Глава 7

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| <b>Прикладные вопросы .....</b> | <b>520</b> |
|---------------------------------|------------|

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 7.1. | Статистическая оценка загрузки радиовещательных декаметровых каналов и частотных полос .....       | 520 |
| 7.2. | Экономические аспекты повышения точности расчетов характеристик радиотрасс .....                   | 528 |
| 7.3. | Защитные отношения в совмещенном канале для АМ-радиовещания .....                                  | 534 |
| 7.4. | История исследований распространения радиоволн до 30 МГц в НИИР и их практическое применение ..... | 539 |

## Глава 8

|   |            |
|---|------------|
| <b>Вопросы цифрового радиовещания .....</b> | <b>552</b> |
|---|------------|

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 8.1. | Цифровое радиовещание до 30 МГц: иллюзии и реальность<br>Часть 1. Длинные и средние волны. Светлое время суток..... | 552 |
| 8.2. | Цифровое радиовещание до 30 МГц: иллюзии и реальность<br>Часть 2. Длинные и средние волны. Темное время суток.....  | 584 |
| 8.3. | Цифровое радиовещание до 30 МГц: иллюзии и реальность<br>Часть 3. Короткие волны.....                               | 595 |
| 8.4. | Прием DRM-вещания на коротких волнах.....   | 603 |
| 8.5. | Характеристики быстрых замираний цифрового ионосферного КВ-сигнала и многократные свертки .....                     | 619 |

## Глава 9

|   |            |
|---|------------|
| <b>Научная публицистика. О ЦРВ и не только.....</b> | <b>631</b> |
|---|------------|

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 9.1. | Что делать с радиовещанием до 30 МГц ..... | 631 |
| 9.2. | Цифровое радио. Плюсы и минусы .....       | 639 |
| 9.3. | Где DRM'у жить хорошо .....                | 646 |
| 9.4. | Как внедрять DRM будем? .....              | 653 |
| 9.5. | Ионосфера и DRM. Быть ли свадьбе?.....     | 660 |
| 9.6. | Всеу свое место. DRM'у тоже .....          | 671 |
| 9.7. | Луч света в царстве DRM .....              | 677 |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| <b>Дополнения. Два портрета.....</b> | <b>686</b> |
|--------------------------------------|------------|

*Валентине Сергеевне Черновой, моей жене,  
чья неустанная поддержка, любовь, дружба  
стали органической частью моей жизни  
и творчества, без которой я вряд ли смог бы  
сделать даже малую часть того, что  
изложено в этой книге*

# Введение

Прошедший примерно 50-летний период характеризуется весьма скудным поступлением книг по распространению радиоволн в приложении к работе каналов связи и вещания, отражающих новые или ранее полученные, но интересные и не сразу обратившие на себя внимание теоретические или экспериментальные результаты.

Последняя фундаментальная монография, посвященная исследованиям распространения радиоволн, «Распространение радиоволн и ионосфера», 480 стр., была опубликована Я.Л. Альпертом в 1960 году. Эта книга наиболее полно отражает физическую сторону работы ионосферных радиоканалов и сопровождающие полученные выводы экспериментальных наблюдений. Некоторые исследования в диапазоне средних частот отражены в небольших книгах В.Е. Кашпровского и Ф.А. Кузубова «Распространение радиоволн земным лучом», 220 стр., (1971 г.), и И.М. Виленского и В.С. Ямпольского «Распространение средних радиоволн в ионосфере», 119 стр., (1983 г.). Издано несколько хороших учебных пособий, но они отражают в основном, как и положено учебникам, устоявшиеся и хорошо проверенные точки зрения вчерашнего дня. После выхода этих книг за прошедшие годы проведено большое количество теоретических и экспериментальных работ, сведения о которых содержатся в различных журналах и сборниках, часто малоизвестных и потому труднодоступных для ознакомления.

Отметим, что за многие последние годы не было опубликовано ни одной монографии по работе радиолиний на частотах ниже 30 МГц, кроме книг О. Головина по КВ-линиям. В них рассматриваются, в основном, сетевые и структурные вопросы. Проблемы, рассмотренные в данной книге с достаточной детализацией, не входили в задачи упомянутых монографий. Современные взгляды на распространение радиоволн в ионосфере хорошо отражены в последних монографиях Ю.К. Калинина «Вопросы ионосферной геофизики и радиофизики», М., 2012 г. и Акимова В.Ф., Калинина Ю.К. и Тасенко С.В. «Односкачковое распространение радиоволн», М., 2014 г. Вопросы коротковолновой связи рассматриваются также многими другими научными коллективами. Не анализируя работы коллективов силовых ведомств, можно отметить многолетнюю работу Поволжского Университета (Йошкар-Ола) по плодотворному изучению свойств ионосферы и работы КВ-каналов в различных условиях, а также ряд учреждений в северных районах страны.

В данной книге собран материал, содержащийся в публикациях, написанных либо только автором, много лет занимающимся вопросами распространения длинных, средних и коротких радиоволн и их приложением к задачам связи и радиовещания, либо в соавторстве с коллегами (из 78 разделов две трети написаны только автором, остальные в соавторстве). Они написаны в различные годы, опубликованы в различных журналах, иногда в труднодоступных. Но многие из полученных результатов не устарели и, будучи по тематике собранными в одном месте, дают представление о проблемных моментах, что может быть полезным в дальнейших исследованиях. Наука о распространении радиоволн не развивается сама по себе. В практических задачах она тесно переплетается с антенной тематикой, дифракцией и рассеянием, надежностью и рядом других направле-

ний. Частично они отражены в настоящей книге. Хотелось бы надеяться, что некоторые из пытливых читателей найдут для себя наводящие или неполно решенные вопросы, которые послужат стимулом к продолжению исследований в этой интереснейшей области.

Отметим, что наибольшее место в книге уделено свойствам и работе канала связи, и лишь небольшая часть объема уделена собственно особенностям ионосферы и вопросам дифракции. Это представляется правильным, так как задачи более глубокого и последовательного изучения ионосферы решаются академическими или специализированными коллективами, как, например, ИЗМИРАН, ААНИИ, ИПГ и др.

В конце книги есть раздел, посвященный публицистическим работам, доступным образом отражающим состояние радиовещания в настоящее время. Такое дополнение представляется весьма полезным, так как для читателей, не являющихся глубокими профессионалами в вопросах ионосферы и работе каналов, но хорошо разбирающихся в организации связи и вещания, эти работы помогут разъяснить многие вопросы.

Вопросы, рассматриваемые в книге, сгруппированы по направлениям. Каждое направление предваряется небольшим введением, поясняющим повод к проведению тех или иных исследований. Возможно, это окажется полезным. В ряде разделов, в которых один изучаемый вопрос рассматривается с разных сторон, могут быть сходные по содержанию фрагменты текста или подобные рисунки. Такие повторы целесообразно было не упразднить, чтобы не ломать изложение материала в каждом из разделов.

Следует особо выделить важное, на мой взгляд, обстоятельство. В книге достаточно места уделено земному распространению длинных и средних волн. Это связано с тем, что все предыдущие десятилетия от начала их использования считалось, что напряженность поля на линиях этого диапазона ведет себя достаточно стабильно, и вариации уровня сигнала, если и встречаются, то являются весьма малыми, и их можно не принимать во внимание. Ни на их величину, ни на причину возникновения этих вариаций и их закономерности исследователи, кроме нескольких единиц публикаций (например, упомянутой выше книги Кашпровского В.Е. и Кузубова Ф.А., швейцарского журнала за 1945 год), практически не обращали внимания. Наблюдения на территории России на протяжении почти 20 лет на линиях радиовещания показали, что существует целый мир, в котором живут трассы земных волн, по своим законам, с массой корреляционных связей, у которых есть сферы жизни, где изменения постоянно невелики, а есть сферы, где на регулярной основе изменения могут достигать 20 дБ. Все это до поры до времени не замечалось, в значительной степени потому, что этот диапазон использовался почти исключительно для радиовещания, в котором использовалась система двухполосной амплитудной модуляции и передатчики большой и очень большой мощности. Все это способствовало малой заметности на слух, с его логарифмической шкалой слышимости, происходящих колебаний уровня сигнала.

Особенно остро вопрос о случайных и детерминированных изменениях сигнала возник в начале 2000-х годов, когда была предложена система цифрового радиовещания DRM (Digital Radio Mondiale). Главное принципиальное отличие цифровой системы от аналоговой состоит в том, что цифровая система — пороговая. Если при аналоговой системе уровень сигнала снижается, например, на 10 дБ

от регламентированного уровня для хорошего приема, то это приводит субъективно к некоторому снижению качества сигнала или к некоторому снижению комфортности приема. При таком же снижении сигнала от уровня, достаточного для нормальной работы системы при цифровой модуляции, происходит полное пропадание приема. Эти обстоятельства вызвали подъем интереса к повышению стабильности уровня напряженности поля, а значит, и к изучению причин его случайных и неслучайных замираний. Возникшие внезапно препятствия, возможно, послужили одним из сдерживающих мотивов на пути скорейшего внедрения цифрового радиовещания.

Ниже этот блок вопросов достаточно подробно рассмотрен в главе о распространении длинных и средних волн, главе о цифровом радиовещании и в публицистическом разделе.

Все, написанное в книге, вобрало в себя неизмеримое число продуктивных бесед с моими коллегами. С особой теплотой я всегда вспоминаю моего первого наставника Константина Михайловича Косикова, который как талантливый селекционер на всю жизнь привил мне любовь к распространению радиоволн. Очень многому я научился у Е.И. Розенфельда, Н.Н. Шумской, А.А. Магазаника, А.И. Калинина, В.Н. Троицкого, Л.В. Надененко и других коллег — ученых и практиков высочайшего уровня. У меня были тесные творческие контакты с коллегами из других институтов. Всех отметить не удастся, но наибольшее участие в совместных исследованиях и обсуждениях текущих проблем принимали Ю.Н. Черкашин, Ю.К. Калинин, П.М. Свитский, В.И. Бочаров, Т.С. Керблай, Е.М. Жулина, В.М. Лукашкин и многие другие. Я благодарен Случаю, что мне довелось работать рядом или вместе с ними.

Все изложенные результаты, и теоретические, и экспериментальные являются плодом многолетней работы. За это время сменился не один директор. Последний, при котором я работал и еще продолжаю трудиться, это Валерий Владимирович Бутенко. Когда впервые несколько лет назад зашла речь об издании книги, он активно поддержал эту идею. Я ему весьма признателен.

В книге разделы, написанные мной, не отмечены фамилией, написанные с коллегами — содержат фамилии всех соавторов за исключением моей. Я благодарен всем соавторам за их неоценимое участие в процессе исследований. И я также многому научился у них.

И под конец не могу не сказать о Викторе Павловиче Дворковиче, без непрерывных положительных воздействий которого на меня я эту книгу вряд ли закончил бы. Большое ему спасибо.

## Несколько слов об авторе

Юрий Андреевич Чернов родился 14 февраля 1932 г. Еще в школьные годы увлекся радиолюбительством, что и определило выбор профессии. В 1955 г. после окончания Института связи (МЭИС) поступил на работу в Научно-исследовательский институт радио Министерства связи. Научной работой начал заниматься, будучи студентом, дипломная работа была посвящена исследованию нелинейных искажений и устойчивости рефлексных схем вещательных радиоприемников. На эту же тему в 1956 г. вышла первая статья в журнале «Радиотехника». Дальнейшая работа в НИИР была посвящена изучению распространения радиоволн и радиовещанию.



Рассмотрение теоретических вопросов распространения радиоволн показало недостаточность вузовской и аспирантской математической подготовки, требовалось углубление знаний по ряду математических направлений, что оказалось возможным благодаря посещениям в МГУ семинара по теории вероятностей и лекций по ветвящимся процессам А.Н. Колмогорова, факультативных курсов по теории информации Р.Л. Добрушина и др.

Результаты экспериментальных и теоретических исследований распространения и рассеяния радиоволн в приложении к загоризонтной радиолокации легли в основу кандидатской диссертации, защищенной в 1966 г. Монография на эту же тему вышла в 1971 г. Проведенные исследования обнаружили большую неопределенность и неполноту наших знаний о поведении коротких волн в масштабах земного шара. Для развития этого направления с участием Ю.А. Чернова была организована широкая сеть измерительных пунктов во многих странах мира, на которых в течение почти 10 лет проводились измерения практически на всех линиях иновещания СССР. В дополнение к стационарным измерениям были организованы измерения на судах торгового флота, маршруты которых начинались в Ленинграде, а конечными пунктами были порты Северной и Южной Америки, Африки, Австралии и Южной Зеландии. Для оценки влияния характеристик передающих антенн на напряженность поля и надежность приема были проведены специальные эксперименты на трассах Москва–Владивосток, Николаев–Гавана (Куба), Ангарск–Ханой (Вьетнам).

В результате этого комплекса измерений был собран уникальный по объему и информативности материал, позволивший прояснить поведение радиолиний большой протяженности в различных географических регионах, линий, пролегающих в полярных широтах, получить суточную и сезонную зависимости, а также связь напряженности поля с солнечной активностью.

Участие в работе мировой конференции по коротким волнам и подготовка материалов к ней, как теоретических, так и экспериментальных, дали основу для написания и защиты докторской диссертации по надежности радиовещания на коротких волнах.

В последующие годы основное внимание было уделено радиовещанию на длинных и средних волнах. Был собран обширный экспериментальный материал на большом числе радиолиний малой и большой протяженности за светлое и темное время суток начиная с 1997 г. до 2017 г. Это позволило выявить ряд закономерностей в поведении земных радиоволн ДСВ-диапазона, как детерминированных, так и статистических. Большое число новых полезных результатов было внесено в ряд Рекомендаций МСЭ-R. Всего по тематике распространения радиоволн было предложено в МСЭ-R более 50 документов. Значительная часть материала была включена в Справочник МСЭ-R по земным волнам и в Справочник по ионосфере и ее влиянию на распространение радиоволн. Результаты этих исследований позволили намного глубже понять поведение средних и длинных волн, радиолиний, которые исторически считались наиболее спокойными, и по-новому подойти к расчету сетей радиовещания с учетом выявленных статистических и детерминированных закономерностей.

В настоящее время интенсивно изучается поведение радиолиний вещания на КВ и ДСВ, работающих в цифровом формате DRM. Наблюдение за работой таких радиолиний показывает, что в природных условиях их работа существенным образом отличается от тех прогнозов, которые были сделаны расчетным путем при создании цифровой системы. В действительности все намного сложнее. С дополнительными деталями творческой биографии Ю.А. Чернова можно ознакомиться в разделе 7.4.

# ГЛАВА I

## ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН

Явления дифракции и рассеяния волн, порознь или вместе, присутствуют на любых радиоперелиниях связи. В частности, по рассеянию опубликованы тысячи работ, и конца завершению исследований не видно. Очень велико разнообразие задач и трудностей на пути их решения. Необходимость решать некоторые из задач возникла в связи изучением проблемы загоризонтной радиолокации на дециметровых волнах, которая развивается и в настоящее время. Вопросы рассеяния неотделимы от свойств рассеивающего объема или рассеивающей поверхности. Сложным вопросом является оценка статистических параметров природных неровных поверхностей. При расчете индикатрисы рассеяния одним из наиболее трудных вопросов является учет затенений на статистически неровной рассеивающей поверхности при наклонном облучении. Этой проблеме ученые отдали много сил, но удобного решения так и не было получено. Названным вопросам посвящены отдельные статьи.

### I.1. Об одном противоречии в теории дифракции<sup>1</sup>

1. Дифракция на отверстии в идеально проводящем экране в рамках приближения Кирхгофа изучена достаточно хорошо. Сравнительно просто решается задача и о дифракции на дополнительном экране при расположении источников и точки наблюдения в одном полупространстве. Однако сравнение видов самих решений вызывает некоторое недоумение.

В частности, Л.А. Вайнштейн отметил, что решения имеют различную угловую зависимость вторичного поля, а дифрагированное на пластине поле не удовлетворяет принципу взаимности ([1], § 91). При этом составляющие поля на поверхности экрана приняты удвоенными по сравнению с падающим полем. Такой подход в общетеоретическом плане развит в известной монографии «Антенны сантиметровых волн» [2].

Ниже сделана попытка обнаружения причины и устранения отмеченного противоречия.

2. Разделим бесконечное пространство на три области: источники поля, ограниченные поверхностью  $S_1$ , область расположения точки приема  $P$ , ограниченную поверхностями  $S_2$  и  $S_1$ , и внешнее пространство (рис. 1.1.1).

---

<sup>1</sup> Радиотехника. 1966. № 7. С. 71–73.

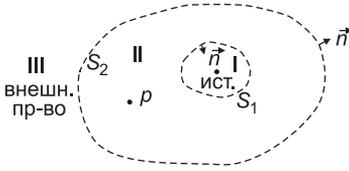


Рис. 1.1.1.

Искомое поле выразим с помощью формулы Стреттона и Чу [3, стр. 410].

$$\bar{E}_P = -\frac{1}{4\pi} \int \left( i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi + [\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi + (\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi \right) dS, \quad (1.1.1)$$

где интегрирование распространяется на всю ограничивающую поверхность, т. е. на

$$S_\Sigma = S_1 + S_2.$$

Из теории электромагнитного поля известно:

а. Если интегрирование производится только по стороне  $S_2$ , обращенной к пространству II, то интеграл равен нулю, так как по отношению к III пространство II является внешним ([3], § 8.14, курсив в последнем абзаце, а также [4], гл. 1, § 3, п. 12). Это следует и из того, что поверхность  $S_2$  может быть уведена в бесконечность без пересечения при этом точки наблюдения или источников.

б. Обязательным условием справедливости теоремы Грина, на основе которой получено (1.1.1), является интегрирование по замкнутой поверхности. Только в этом случае можно говорить о безусловном равенстве нулю интеграла по стороне поверхности  $S_2$ , обращенной к пространству II. Остающийся интеграл по  $S_1$  и определяет в этом случае поле в  $P$ .

Совместим теперь с частью  $S_2$  идеально проводящий экран  $S_3$  (рис. 1.1.2), размеры которого и конфигурация удовлетворяют условиям применимости приближения Кирхгофа.

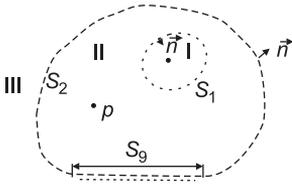


Рис. 1.1.2.

Суммарное поле непосредственно над поверхностью экрана, в пренебрежении краевыми эффектами (что отвечает приближениям Кирхгофа), задается удвоенной касательной составляющей магнитного поля и удвоенной нормальной составляющей электрического поля. Полное поле в точке  $P$  найдется по формуле (1.1.1), где интегрирование требуется провести по всей ограничивающей поверхности, т. е.  $S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$ :

$$\bar{E}_P = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1+S_2} \left( i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi + [\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi + (\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} \left( 2i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi + 2(\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi \right) dS. \quad (1.1.2)$$

Здесь  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$  — составляющие поля при отсутствии экрана.

Добавим и вычтем в фигурных скобках второго интеграла (1.1.2) вектор  $[[\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi]$ , после чего получим:

$$\bar{E}_P = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left( i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi + [[\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi] + (\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi \right) dS -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4\pi} \int_{S_2+S_3} (i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi + [[\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi] + (\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi) dS - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} (i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi - [[\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi] + (\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi) dS. \quad (1.1.3)
\end{aligned}$$

Первый интеграл в (1.1.3) определяет первичное поле в точке  $P$  при отсутствии экрана; второй интеграл, согласно сказанному выше, равен нулю. Третий интеграл определяет ту часть поля, которая вызвана наличием экрана. Таким образом, вторичное поле определяется выражением:

$$\bar{E}_2 = - \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} (i\omega\mu[\bar{n}\bar{H}]\varphi - [[\bar{n}\bar{E}]\text{grad}\varphi] + (\bar{n}\bar{E})\text{grad}\varphi) dS. \quad (1.1.4)$$

Этот интеграл в точности равен величине, которая была бы получена при интегрировании по экрану отраженного от него поля [этому соответствует знак  $(-)$  у второго слагаемого], а не суммарного, определяемого условиями  $\bar{E}_3 = 2\bar{E}_T$ ,  $\bar{H}_3 = 2\bar{H}_t$  и входящего в первоначальное равенство (1.1.2).

В частном случае бесконечно протяженной плоскости вторичное поле в точке  $P$  (рис. 1.1.2) можно получить как по формуле (1.1.4), так и путем интегрирования по суммарному полю над экраном (второй интеграл в (1.1.2)). Это следует из того, что поверхность  $S_3$  можно дополнить воображаемой поверхностью  $S_2$ , все точки которой лежат в бесконечности. Как было показано, тогда интеграл по всей поверхности  $S_2 + S_3$  по падающему полю равен нулю. Интеграл по  $S_2$  тоже равен нулю (в силу условия излучения), что ведет к равенству нулю интеграла вдоль  $S_3$  по падающему полю. Интегрирование вдоль  $S_3$  по оставшемуся отраженному полю приводит к выражению (1.1.4).

3. В упомянутой монографии [2] поле в точке  $P$  определяется равенством [гл. III, § 10, формула (112)]:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_P = & - \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ i\omega\mu\bar{j} + \frac{\rho}{\varepsilon} \text{grad} \frac{e^{-ikR}}{R} + \left[ \bar{j}_m \text{grad} \frac{e^{-ikR}}{R} \right] \right\} dV - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \left\{ i\omega\mu\bar{K} - \frac{\eta}{\varepsilon} \text{grad} \frac{e^{-ikR}}{R} \right\} dS, \quad (1.1.5)
\end{aligned}$$

где  $\bar{K} = [\bar{n}\bar{H}]$ ,  $\frac{\eta}{\varepsilon} = (\bar{n}\bar{E})$ ,  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$  — суммарное поле над поверхностью экрана. Первый интеграл в (1.1.5) дает поле первичных источников.

Размеры экрана  $S_i$  во втором интеграле не оговорены. Судя по тому, что он дополняется бесконечно удаленной поверхностью, его размеры также бесконечны во все стороны. В этом случае вторичное поле из (1.1.5) эквивалентно второму интегралу в (1.1.2).

В дальнейшем решение (1.1.5) механически переносится на случай ограниченных поверхностей ([2], гл. V, § 8, формула (62а)). При этом по умолчанию предполагается, что интеграл по дополнительной поверхности ( $S_2$  на рис. 1.1.2) равен нулю. Но, как было отмечено, это неверно, так как интегрировать необходимо по замкнутой поверхности. В противном случае нарушаются условия, при которых справедлива теорема Грина. Поэтому в [2] вторичное поле от ограниченного экрана сохранено в виде второго слагаемого (1.1.2), а не получено

в виде (1.1.4). Потерей интеграла по  $S_2$  в [2] при определении дифракции от ограниченного экрана и объясняется противоречие, отмеченное Вайнштейном. Можно показать, что расчет дифрагированного поля на пластине с использованием (1.1.4) приводит к выражению, отличающемуся только знаком от поля, дифрагированного на дополнительном отверстии.

Автор благодарен Ю.А. Ерухимовичу за неоднократное обсуждение затронутых вопросов.

## Литература

1. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: «Советское радио», 1957.
2. *Антенны сантиметровых волн. Ч. 1.* М.: «Советское радио», 1950.
3. *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: ГИИТЛ, 1948.
4. *Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К.* Теория дифракции. М.: Изд-во. «Мир», 1964.

### 1.2. О связи между распределением метеорных тел по массе и автокорреляционной функцией взрыхленной ими поверхности планеты<sup>1</sup>

Установлена связь между параметрами автокорреляционной функции поверхности и параметром  $s$  образовавшего ее метеоритного потока.

На основании теории подобия получено выражение для спектральной плотности квадратов амплитуд разложения поверхности в предположении, что поверхность образована подобными кратерами. Найдено, что параметр  $s$  распределения метеоритного потока, взрыхлившего поверхность планеты, не должен быть больше  $2\frac{2}{3}$ . В случае, если автокорреляционная функция поверхности в основной своей части близка к экспоненте или прямой линии, параметр  $s$  в распределения по массе метеорных тел равен двум.

Распределения по массам метеорных тел, вторгающихся в земную атмосферу спорадически или в виде потоков, изучены сравнительно подробно. Но массы этих тел весьма малы — приблизительно от 1 до  $10^{-9}$  г. Многочисленными исследованиями установлено, что для таких масс дифференциальный закон распределения в диапазоне, равном многим порядкам, удовлетворительно описывается обратностепенной зависимостью:

$$dN = N_0 \frac{dm}{m^s}, \quad (1.2.1)$$

где  $s$  колеблется от 1,3 до 2,5.

О телах более крупных, порядка 1000 г и выше, известно гораздо меньше. В работе Левина, Козловской и Старковой [1] показано, что для метеоритов, найденных на поверхности Земли, показатель  $s$  лежит в пределах от 1,6 до 0,9. Несколько позднее Хоукинсом [2] были построены распределения для 1447 метеоритов (раздельно для железных и каменных), в которых  $s$  оказалось равным в

<sup>1</sup> *Астрономический журнал.* 1966. № 5. С. 1064–1073.

среднем 2. Этим исследованиям, по-видимому, свойственно преуменьшение доли более легких метеоритов, связанное с большими трудностями их обнаружения.

Относительно еще более крупных метеорных тел, таких, например, какие формировали некоторые участки лунной поверхности, известно еще меньше. Изучение их распределений может быть основано в настоящее время только на установлении связей между свойствами метеорного потока и производимыми метеорами возмущениями поверхности. Кроме изучения формирования планет, определение статистических свойств их поверхностей важно, в частности, в теории рассеяния радиоволн естественными поверхностями, в радиолокационной астрономии и т. п.

**Рис. 1.2.1.** Кратеры: 1 — самые ранние и впоследствии стертые; 2 — более поздние; 3 — наиболее поздние



Непосредственно определению параметра  $s$  из статистических свойств поверхности Луны посвящена работа Яшека [3]. Основываясь на распределении размеров лунных кратеров, исследованном Янгом [4], Яшек нашел, что в распределении метеоров по массам  $s$  в среднем равно 1,7. Из данных, приведенных в работе Янга, можно заключить, что для крайних значений  $s$  в распределении кратеров по диаметрам ( $s = 2$  для  $2 \div 9$  миль и  $s = 3$  для  $50 \div 100$  миль) величина показателя в распределении метеоров по массам должна была бы, следуя методике Яшека, находиться в пределах  $1,3 \div 2$ .

Расчеты распределения диаметров кратеров далеко не всегда и не для всех размеров могут быть проведены с требуемой точностью. Кроме того, для планет, имеющих непрозрачную для световых волн атмосферу, этот способ, естественно, применен быть не может. Поэтому представляет интерес отыскание зависимости между параметрами метеорного потока и автокорреляционными свойствами взрыхленной им поверхности планеты. Автокорреляционная функция является важной статистической характеристикой поверхности и в большой мере определяет особенности рассеяния радиоволн.

Всесторонне исследовать зависимость свойств поверхности от параметра  $s$  в рамках одной статьи не представляется возможным. Поэтому в данной работе использован ряд идеализирующих допущений, оправданных также и тем, что ее основной целью является рассмотрение метода анализа и получение предварительных оценок.

Исходя из свойств поверхности (считая ее заданной), будем искать распределение по массам в виде (1.2.1). В этом случае определению подлежит единственный параметр  $s$ .

Уточним теперь исследуемую модель поверхности.

Профиль произвольного сечения поверхности планеты является случайной функцией, которую мы будем рассматривать как случайный процесс, непрерывный и стационарный, со средним значением, равным нулю, в котором роль времени играет пространственная переменная. Будем также считать, что этот процесс образован линейной суперпозицией всех появляющихся кратеров, так что высота в каждой точке поверхности есть алгебраическая сумма высот соответствующих элементов всех кратеров, которым принадлежит данная точка.

В действительности это не совсем так, ибо при образовании большого кратера происходит стирание всех более мелких неровностей, накопившихся на данном месте до этого момента. При всех же последующих наложениях высоты неровностей, можно считать, складываются линейно (рис. 1.2.1). Поэтому статистические свойства поверхности могут отражать распределение метеорных тел с некоторым уменьшением доли малых масс. Степень этого уменьшения, по-видимому, может быть оценена, но анализ ее представляется достаточно сложным и в рамках данной работы проведен быть не может. Частично этот вопрос рассмотрен Артуром [5]. Здесь отметим только следующее.

Из принятой формы распределения (1.2.1) следует, что при  $s > 1$  с увеличением массы  $m$  плотность вероятности падает таким образом, что, несмотря на рост площади каждого кратера, общая площадь кратеров, а значит, и общее число кратеров, стертых всеми метеоритами, массы которых находятся в интервале  $dm$ , с увеличением  $m$  уменьшается. Причем уменьшение тем заметнее, чем больше  $s$ . Это позволяет надеяться, что полученное решение, хотя и может служить только первым приближением, все же не будет обладать существенными погрешностями.

В том случае, когда перекрытие кратеров пренебрежимо мало или отсутствует совсем, указанный перекокс распределения в сторону больших значений ощущаться не будет.

Обработка фотографий лунной поверхности, проведенная Дж. Артуром [6], показала, что в большинстве случаев отношение глубины кратера  $d$  к его диаметру  $D$  сохраняется постоянным. В диапазоне диаметров 5–15 км это отношение лежит в пределах 0,15–0,23.

Болдуин [7] было проделано много измерений над лунными кратерами, воронками от бомб, снарядов и мин и получена зависимость между диаметром воронок и их глубиной. Выяснилось, что все они образуют непрерывную последовательность, отличающуюся малым разбросом отношения характерных размеров. Для кратеров диаметром  $\approx 10$  км отношение глубины к диаметру несколько меньше, чем по измерениям Артура, и равно примерно 0,1.

Кроме того, при измерении внешних валов кратеров диаметром до 20 км была обнаружена большая корреляция между диаметром кратера и высотой вала [6].

Эти измерения говорят о том, что на лунной поверхности в нешироком диапазоне размеров выполняются условия подобия для образующихся неоднородностей. Неоднородности типа кратера могут иметь несколько критериев подобия. Ниже нам потребуется только один из них,  $\eta$  — отношение глубины кратера  $d$  к диаметру  $D$ .

$$\eta = \frac{d}{D}. \quad (1.2.2)$$

Измерения Болдуина показали, что в широком диапазоне размеров кратеров величина  $\eta$  не остается постоянной. При изменении  $D$  на три порядка  $\eta$  изменяется приблизительно на порядок. Не преследуя цели учета всех деталей модели, в качестве первого приближения в данной работе принято, что  $\eta$  является постоянной величиной.

Другой характеристикой поверхности, которая будет использована в дальнейшем, является автокорреляционная функция  $B(\tau)$ , где  $\tau$  — горизонтальное

расстояние между двумя точками поверхности. По определению функция  $B(\tau)$  является средним значением произведения высот поверхности, измеренных в точках, отстоящих на  $\tau$ , т. е.:

$$B(\tau) = \overline{h(t)h(t+\tau)}, \quad (1.2.3)$$

где  $h(t)$  — высота поверхности в точке  $t$ ,  $h(t+\tau)$  — высота поверхности в точке, отстоящей на  $\tau$  от предыдущей; черта сверху означает статистическое усреднение по всем возможным реализациям сечения. Поверхность в дальнейшем будем предполагать изотропной.  $B(\tau)$  является мерой зависимости высот в разнесенных точках поверхности; автокорреляционная функция максимальна при  $\tau = 0$  и стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . При  $\tau = 0$  величина  $B(0)$  равна дисперсии процесса  $\sigma^2$ .

Преобразование Фурье от автокорреляционной функции определяет спектральную плотность мощности случайного процесса  $S(\omega)$ . Под мощностью понимается дисперсия амплитуд гармонических составляющих, если спектр дискретен, или дисперсия на единицу полосы частот, если спектр непрерывен. Под частотой  $\omega$  в дальнейшем будем понимать величину:

$$\omega = \frac{2\pi}{L}n,$$

где  $L$  — длина по горизонтали обследуемого процесса (сечения),  $n$  — номер гармонической составляющей спектра.

Слово «частота» из соображений терминологических удобств заимствовано из анализа процессов, в которых роль расстояния выполняет время.

Периодическим случайный процесс будет тогда, когда он составлен из бесконечного числа примыкающих друг к другу тождественно похожих случайных реализаций длины  $L$ .  $L$  в этом случае будет основным периодом процесса.

Автокорреляционная функция  $B(\tau)$  и спектральная плотность мощности профиля сечения связаны прямым и обратным преобразованием Фурье (подробнее по этим вопросам см., например, [8], гл. 4–6):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

Поэтому, найдя связь спектральной плотности  $S(\omega)$  с распределением метеоритов, мы автоматически определяем и функцию  $B(\tau)$ . Пример вида спектральной плотности и автокорреляционной функции для бетонной поверхности приведен на рис. 1.2.2.

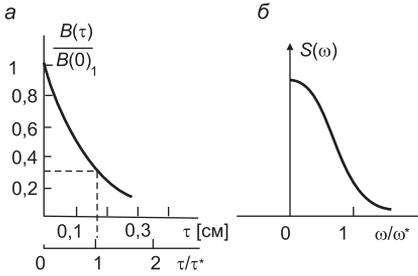
Рассмотрим произвольное сечение поверхности, профиль которого состоит из симметричных подобных возмущений. Пусть на отрезке сечения  $L$  их будет достаточно большое число. Форма неровностей для анализа не имеет значения. Тогда каждое возмущение поверхности будет описываться некоторой функцией  $u$ , аргумент которой будет зависеть от высоты данной неровности.

Временно будем предполагать, что центры всех неоднородностей лежат на проведенном нами сечении. При этом формы неровностей и их  $\eta$  одинаковы. В дальнейшем мы освободимся от этого ограничения. Чтобы при изменении вертикальных размеров не нарушалось подобие неровностей, необходимо пропорционально изменять и масштаб по оси абсцисс, поэтому общее выражение

для возмущений должно иметь вид:

$$u_\lambda = A_\lambda u \left( \frac{t - t_\lambda}{\tau_0} \frac{A_0}{A_\lambda} \right) = A_\lambda u \left( \frac{t - t_\lambda}{A_\lambda} \eta \right), \quad (1.2.4)$$

где  $t_\lambda$  — положение центра неровности на оси  $t$ ,  $A_\lambda$  — высота рассматриваемой неровности номера  $\lambda$ ,  $A_0$  и  $\tau_0$  — соответственно высота и эффективный радиус неровности, принятой за единицу, причем  $A_0/\tau_0 = \eta$ .



**Рис. 1.2.2.** *a* — автокорреляционная функция для бетонной поверхности,  $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-7\tau)$ ,  $\sigma = 1,61 \times 10^{-2}$  см,  $\tau^*$  — радиус корреляции; *b* — спектральная плотность автокорреляционной функции, показанной на рис. 1.2.2, *a*,  $\omega^*$  — эффективная ширина спектра

Величина  $A_\lambda \tau_0 / A_0 = A_\lambda / \eta$  является эффективным радиусом  $\lambda$ -й неровности. Это означает, что величина  $A_\lambda / \eta$  как раз такая, что при достижении аргументом  $|t - t_\lambda|$  ее значения мы практически выходим из области  $t$ , занятой возмущением. Для неровности, условно принятой за единицу,  $A_\lambda = A_0$  и  $A_\lambda / \eta$  просто равно  $\tau_0$ , т. е. в нашем случае эффективный радиус, учитывая (1.2.2), равен половине диаметра кратера.

Для дальнейшего анализа вместо исследуемого сечения длины  $L$  удобно рассматривать бесконечный периодический случайный процесс с основным периодом  $L$ . В этом случае каждое отдельное возмущение  $u_\lambda$  тоже является периодическим, но не случайным процессом и представляется уже не интегралом, а суммой вида:

$$u_\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} G_\lambda(\omega) e^{i\omega t}.$$

Преобразование Фурье от  $u_\lambda$  дает:

$$G_\lambda(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u_\lambda e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{L} A_\lambda^2 \frac{1}{\eta} g \left( \frac{A_\lambda}{\eta} \omega \right), \quad (1.2.5)$$

где  $G_\lambda(\omega)$  — амплитуда спектральной составляющей, в общем случае комплексная;  $g(\omega)$  — та же амплитуда при условии равенства всех параметров единице;  $\eta/A_\lambda$  — эффективная ширина спектра.

Текущее значение составляющей с  $\omega = 2\pi n/L$  равно:

$$u_{n\lambda}(t) = \frac{A_\lambda^2}{L\eta} \left| g \left( \frac{A_\lambda}{\eta} \frac{2\pi}{L} n \right) \right| \cos \left( \frac{2\pi}{L} nt + \varphi_{n\lambda} \right). \quad (1.2.6)$$

Здесь все, что стоит перед косинусом, определяет амплитуду  $n$ -й гармонической составляющей. При случайном расположении центров неоднородностей закон распределения фазы  $\varphi_{n\lambda}$  этой составляющей будет равномерным в интервале  $0-2\pi$ .

Чтобы найти спектр  $S(\omega)$ , нам необходимо вычислить амплитуды его гармонических составляющих. Для этого разобьем множество значений  $A_\lambda$  на подмножества с номерами  $j$ , в каждое из которых будут входить все  $A$  от  $A_j + \Delta A = A_{j+1}$ , где  $\Delta A$  — заданный шаг квантования. Просуммируем теперь от всех неровностей гармонические составляющие  $u_{n\lambda}(t)$  внутри каждого  $j$ . При большом числе неоднородностей высотой (или глубиной) от  $A_j$  до  $A_j + \Delta A$ , учитывая случайность фаз  $\varphi_{n\lambda}$ , в силу предельной теоремы теории вероятностей получим приблизительно нормально распределенную случайную величину. Дисперсия ее  $\sigma_{nj}^2$ , как было сказано выше, численно равна амплитуде  $n$ -й гармонической составляющей парциальной ( $j$ -й) спектральной плотности  $S_j(\omega)$ ,  $j$ -й автокорреляционной функции (как если бы других неровностей, кроме  $j$ -х, не существовало).

Если обозначить  $\Delta\nu_j$  число неровностей на длине  $L$  с вертикальными размерами от  $A_j$  до  $A_{j+1}$  и воспользоваться известным результатом сложения синусоид с одинаковыми амплитудами, но случайными фазами ([9], § 11), то получим:

$$\sigma_{nj}^2 = \frac{\Delta\nu_j G_{j\text{cp}}}{2} = \frac{\Delta\nu_j \tau_0^2}{2L^2 A_0^2} A_{j\text{cp}}^4 g^2 \left( \frac{A_{j\text{cp}} \omega}{\eta} \right), \quad (1.2.7)$$

где  $A_{j\text{cp}}$  и  $G_{j\text{cp}}$  — некоторые средние значения  $A$  и  $G$  в пределах  $A_j \div A_{j+1}$  и  $G_j \div G_{j+1}$ .

Полная дисперсия гармонической составляющей  $\omega_n$  равна сумме дисперсий  $\sigma_{nj}^2$  по всем  $j$ :

$$\sigma_{n^2} = \frac{1}{2L^2 \eta^2} \sum_{j=1}^M \Delta\nu_j A_{j\text{cp}}^4 g^2 \left( \frac{A_{j\text{cp}} \omega}{\eta} \right), \quad (1.2.8)$$

где  $M = A_{\text{макс}}/\Delta A$ ,  $A_{\text{макс}}$  — наибольший вертикальный размер неровностей.

Для вычисления суммы (1.2.8) найдем число неоднородностей  $\Delta\nu_j$   $j$ -го размера на длине  $L$ . Для этого рассмотрим квадратный участок поверхности со стороною  $L$ . Пусть  $w_j$  есть средняя энергия метеоритов группы  $j$  (т.е. таких, которые создают кратеры группы  $j$ ) и  $\mathcal{E}(w_j)$  — энергия всех метеоритов, приходящаяся на единицу площади, которые образуют кратеры с вертикальными размерами, в среднем равными  $A_j$ , но с разбросом не в пределах  $\Delta A$ , а в единичном интервале высот. Очевидно, что  $\mathcal{E}(w_j)$  является некоторой функцией  $w_j$  или  $A_j$ . Полная энергия метеоритов группы  $j$  на площади  $L^2$  теперь запишется (обозначим ее  $\Delta W_j$ ):

$$\Delta W_j = \mathcal{E}(w_j) \Delta A L^2. \quad (1.2.9)$$

Число возмущений на площади  $L^2$  найдется как

$$\frac{\Delta W_j}{w_j} = \frac{\mathcal{E}(w_j) \Delta A L^2}{w_j}. \quad (1.2.10)$$

Если возмущения затрагивают некоторую линию (в частности, прямую) длины  $L$ , то их центры должны располагаться в прилегающей к этой линии полосе, ширина которой равна поперечному размеру возмущения, т.е.  $2\tau_j$ . В этом случае число неоднородностей вдоль  $L$  будет равно числу возмущений на  $L^2$ , умноженному на отношение  $2\tau_j/L$ .

Из (1.2.10) получим:

$$\Delta v_j = \frac{2\mathcal{E}(w_j)\Delta AL\tau_j}{w_j}. \quad (1.2.11)$$

Выразим теперь  $\mathcal{E}(w_j)/w_j$  через  $A_j$ .

Задание определенного вида закона распределения метеорных тел по массам с большой точностью определяет и вид зависимости  $\mathcal{E}(w_j)$  от  $w_j$ . Это видно из следующего.

Из теории взрывных явлений при падении метеоритов известно, что объем «взорванного» грунта пропорционален энергии удара ([10], гл. VIII, § 4). Этот объем может быть приближенно вычислен как  $V_\lambda = \pi\tau_\lambda A_\lambda$ . Средняя длина неровности  $2\tau_j$  ср может быть выражена через  $A_j$  и критерий подобия  $\eta$ :

$$2\tau_j \text{ ср} = \frac{2A_j \text{ ср}}{\eta}.$$

Тогда средний объем неоднородности  $V_j$  ср в подмножестве  $j$  равен:

$$V_j \text{ ср} = \frac{\pi A_j^3 \text{ ср}}{\eta^2}, \quad (1.2.12)$$

откуда

$$A_j \text{ ср} = \sqrt[3]{\frac{\eta^2 V_j \text{ ср}}{\pi}}, \quad (1.2.13)$$

$V_j$  связано с энергией  $w_j$  некоторым постоянным коэффициентом  $\rho$ :

$$V_j = \rho w_j, \quad (1.2.14)$$

что при подстановке в (1.2.12)–(1.2.14) дает:

$$A_j \text{ ср} = \gamma \sqrt[3]{w_j \text{ ср}}, \quad (1.2.15)$$

где  $\gamma = \sqrt[3]{\frac{\rho\eta^2}{\pi}}$ .

На площади, равной единице, число неоднородностей  $\Delta\tilde{v}_j$  в интервале высот  $\Delta A$  теперь может быть найдено как:

$$\Delta\tilde{v}_j = \frac{\Delta W_j}{w_j} = \frac{\mathcal{E}(w_j)}{w_j} \Delta A.$$

При устремлении  $\Delta A$  к нулю можно всю правую часть этого равенства выразить через энергию  $w_j$  путем дифференцирования соотношения (1.2.15). Опуская при этом индекс  $j$ , в силу непрерывности числа неоднородностей по  $A$  найдем:

$$d\tilde{v} = \frac{1}{3}\gamma \frac{\mathcal{E}(w) dw}{\sqrt[3]{w^5}}. \quad (1.2.16)$$

Полученное выражение есть дифференциальное распределение метеорных тел по энергии. Из наземных измерений известно, что скорости метеоров занимают сравнительно узкий диапазон; в подавляющем большинстве метеоры имеют скорости от 20 до 60 км/сек [11]. Диапазон же масс, в котором справедливы эти цифры, оценивается многими порядками ([12], § 11, 5.4).

Поэтому, ориентируясь на среднюю скорость, можно считать [13], что закон распределения метеоров по энергии в среднем такой же, как и по массе, т. е.

$$d\tilde{v} = \frac{\nu_1 dw}{w^s}. \quad (1.2.17)$$

Из сравнения (1.2.16) и (1.2.17) следует, что

$$\mathcal{E}(w) = \frac{3\nu_1}{\gamma w^{s-5/3}} = \frac{3\nu_1}{\gamma w^p}, \quad (1.2.18)$$

где

$$p = s - 5/3. \quad (1.2.18')$$

Таким образом, вид зависимости  $\mathcal{E}(w_j)$  отличается от распределения по массам только величиной показателя степени у  $w$ .

Из (1.2.12), (1.2.14) и (1.2.18) следует, что

$$\frac{\mathcal{E}(w_j)}{w_j} = \frac{3\nu_1}{\gamma w_j^{p+1}} = \rho_1 \left( \frac{\pi A_j^3 \text{cp}}{\eta^2 \rho} \right)^{-p-1}, \quad (1.2.19)$$

где  $\rho_1 = 3\nu_1/\gamma$ .

Число возмущений на длине  $L$  из (1.2.11) с учетом (33) окончательно найдем в виде:

$$\Delta\nu_j = 2\rho_1 \left( \frac{\pi A_j^3 \text{cp}}{\eta^2 \rho} \right)^{-p-1} L \Delta A \tau_j. \quad (1.2.20)$$

Возвращаясь теперь к вычислению полной дисперсии  $\sigma_n^2$ , подставим в (1.2.8) выражение (1.2.20) и, устремив  $\Delta A$  к нулю, заменим сумму интегралом. Получим:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{L^2 \eta^2} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \int_{j=1}^{j=M} \rho_1 \left( \frac{\eta^2 \rho}{\pi A_j^3} \right)^{p+1} L \Delta A \tau_j A_j^4 g^2 \left( \frac{A_j \omega}{\eta} \right) dj. \quad (1.2.21)$$

Здесь опущен индекс среднего значения по  $j$ , имевшийся у  $A_j$  в скобках выражения (1.2.20). При  $A \rightarrow 0$  сохранение этого среднего теряет смысл.

Произведем замену в (1.2.21), учтя, что  $A_j = j \Delta A$ :

$$\frac{A_j \omega}{\eta} = \frac{j \cdot \Delta A \cdot \omega}{\eta} = x, \quad \frac{\Delta A \cdot \omega}{\eta} dj = dx, \quad c(p) = \rho_1 \left( \frac{\rho}{\pi} \right)^{p+1}.$$

Тогда  $\sigma_n^2$  станет:

$$\sigma_n^2 = c(p) \frac{\eta^{4-p}}{L \omega^{3-3p}} \int_0^{\frac{\omega A_{\max}}{\eta}} x^{2-3p} g^2(x) dx. \quad (1.2.22)$$

Величина  $\eta/A_j$  в аргументе функции  $g\left(\frac{A_j}{\eta}\omega\right)$  имеет смысл эффективной ширины спектра. Это означает, что при  $\omega = \eta/A_j g(\omega)$  спадает до малого значения, и при дальнейшем увеличении становится несущественной величиной. Для новой переменной эффективная ширина спектра будет определяться значением  $x = 1$ .

Так как  $\eta = A_0/\tau_0 = A_{\max}/\tau_{\max}$ , где  $\tau_{\max}$  — эффективный радиус самых больших рассматриваемых неровностей, то верхний предел интегрирования становится равным:

$$\frac{\omega_n A_{\max}}{\eta} = \frac{2\pi n}{L} \tau_{\max}. \quad (1.2.23)$$

Но нас не должны интересовать спектральные составляющие, периоды которых больше максимальной длины неоднородностей, так как они вызваны остаточными флюктуациями при усреднении по профилю сечения из-за ограниченности величины  $L$ . Величина этих составляющих пренебрежимо мала. Поэтому  $n$  в (1.2.23) должно быть равно  $L/\tau_{\text{макс}}$  и выше.

В этом случае верхний предел интегрирования  $x_b \geq 2\pi$ , и так как спектральная плотность неоднородности быстро убывает после  $x = 1$ , то без большой погрешности можно положить верхний предел равным бесконечности. Вместе с тем, считая  $L$  достаточно большим, можем, устремляя  $L$  к бесконечности, получить вместо  $\sigma_n^2 L / 2\pi = \sigma_n^2 / \Delta\omega$  спектральную плотность  $S(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_n^2}{\Delta\omega}$ , соответствующую автокорреляционной функции поверхности  $B(\tau)$ . Тогда вместо (1.2.21) получим:

$$S(\omega) = c(p) \frac{\eta^{4-p}}{2\pi\omega^{3-3p}} \int_0^\infty x^{2-3p} g^2(x) dx. \tag{1.2.24}$$

Освободимся теперь от ранее наложенного ограничения относительно обязательного расположения центров возмущений на исследуемом сечении. Если центры расположены случайно (что имеет место в действительности), то неровности одинаковой высоты  $A_j$ , но пересеченные не по середине, дадут профиль, вообще говоря, отличный от центрального и с иным значением  $\eta$ . Покажем, что это не меняет зависимости  $S(\omega)$  от  $\omega$ .

Для этого разобьем каждое подмножество возмущений с высотами  $A_j$ , которые пересекаются выбранным сечением, на еще более мелкие подмножества  $A_{jk}$ , где индекс  $k$  указывает на принадлежность к той или иной величине  $\eta_k$ . Очевидно, что все профили из  $A_j$ , имеющие  $\eta = \eta_k$ , будут одинаковыми и по форме, и по размерам. Тогда для каждого подмножества  $A_{jk}$  можно провести те же рассуждения, что были проведены выше относительно  $A_j$ , и для плотности  $S(\omega)$  вместо (1.2.24) получим (с заменой  $\eta$  на  $\eta_k$ ,  $S(\omega)$  на  $S_k(\omega)$  и  $c(\rho)$  на  $c_k(\rho)$ ):

$$S_k(\omega) = c_k(p) \frac{\eta_k^{4-p}}{2\pi\omega^{3-3p}} \int_0^\infty x^{2-3p} g_k^2(x) dx. \tag{1.2.25}$$

$c(\rho)$  изменилось на  $c_k(\rho)$  вследствие того, что в него входит удельная плотность числа метеорных тел (а значит, и числа возмущений поверхности), которая для  $\eta_k$  будет, естественно, меньше чем для  $\eta$ . Функция  $g(x)$ , вообще говоря, тоже будет зависеть от номера  $k$ .

Если теперь просуммировать парциальные спектральные плотности по всем  $k$ , то получим:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega^{3-3p}} \sum_k c_k(p) \eta^{4-p} \int_0^\infty x^{2-3p} g_k^2(x) dx. \tag{1.2.26}$$

Из (1.2.26) видно, что характер спектральной плотности остался таким же, как и в (1.2.24), изменился лишь коэффициент, теперь равный сумме (1.2.26).

Сделаем еще одно замечание. Закон распределения метеоров по массе, принятый в форме (1.2.1), может быть справедлив только в ограниченном диапазоне

масс. Это следует из того, что интегрирование соотношения (1.2.1) от нулевых масс до бесконечности приводит к бесконечному значению интеграла, что отмечено, в частности, Б.Ю. Левиным [14]. К такому же значению приводит и интегрирование по энергии распределения (1.2.17). Это не позволяет провести соответствующее нормирование получающихся функций распределения, вследствие чего требования, предъявляемые к ним, не могут быть удовлетворены. Однако если значение  $\rho$  не превосходит единицу, то интегралы, входящие в выражения для спектральных плотностей, сходятся, и функция  $B(\tau)$  может быть вычислена. Параметр  $s$  при этом ограничен значением  $s_{\max} = \rho_{\max} + 5/3 = 2\frac{2}{3}$  [см. (1.2.18')].

Чтобы расширить область применения изложенного анализа, необходимо использовать закон распределения метеорных тел по массам не в приближенном виде (1.2.1), а в виде, удовлетворяющем всем требованиям, предъявляемым к функциям распределения (интеграл по плотности должен быть равен единице и т. д.). Насколько известно автору, полный вид такого распределения еще не предложен.

В связи с упрощениями в исходном распределении (1.2.1), поведение спектральной плотности (1.2.24), (1.2.26) имеет некоторые особенности. Оно достаточно точно соответствует поведению автокорреляционной функции в основной части последней, т. е. в области ее средних значений. В области очень малых значений  $B(\tau)$  и значений, примыкающих к  $\tau = 0$ ,  $B(\tau)$  определяется размерами возмущений соответственно очень большими и очень малыми. Эти крайние значения выходят за интересующий нас диапазон размеров возмущений и могут иметь иные параметры распределения, в частности, иные значения  $s$  и  $\rho$ . При интегрировании в (1.2.24)–(1.2.26) это обстоятельство не находит отражения, так как предполагалось, что закон распределения в пределах всего интервала интегрирования постоянен. Подробнее такого вида спектральные плотности и соответствующие им автокорреляционные функции (или структурные функции) рассмотрены в книге Татарского [15, гл. 1].

Для лунной поверхности была сделана попытка построить автокорреляционную функцию [16]. Для этого использовались фотографии Луны, по которым были вычерчены контуры ее лимба. Автокорреляционная функция  $B(\tau)$ , полученная из этого профиля, в значительной своей части (вплоть до 110 км за исключением малой области вблизи  $\tau = 0$ ) может быть аппроксимирована прямой линией или экспонентой (рис. 1.2.1). Правда, контур лунного лимба формируется неровностями, не лежащими точно в одной плоскости. Кроме того, она образована не только интересующими нас крупными кратерами, но и другими неровностями, поэтому непосредственно для нашей цели использована быть не может. Но если автокорреляционная функция сечения похожа на нее, т. е. имеет значительный прямолинейный участок, то спектральная плотность, полученная как косинус-преобразование Фурье от прямой линии или экспоненты (при не очень малых  $\omega$ ), пропорциональна  $\omega^{-3+3\rho} = \omega^{-2}$ . При этом  $3 - 3\rho = 2$ ,  $\rho = 1/3$  из (1.2.18') получим  $s = \rho + 5/3 = 2$ . При более медленном спадании спектральной плотности, т. е. при  $\rho > 1/3$ , величина  $s$  увеличивается, но не более чем до значения  $2\frac{2}{3}$ .

Если автокорреляционная функция случайного процесса в существенной своей части может быть выражена в виде  $B(\tau) = c - a\tau^{\mu-1}$ , то при  $0 < \mu - 1 < 2$ ,

спектральная плотность этого процесса (тоже в существенной своей части) будет пропорциональна  $\omega^{-\mu}$  [15].

То, что полученное значение равно приблизительно двум, не вступает в большое противоречие с фактами, приведенными в начале статьи. Устранение допущенных идеализаций, а также более точное определение автокорреляционных функций поверхности позволит более точно оценить закон распределения крупных метеорных тел по массе.

## Литература

1. Левин Б.Ю., Козловская С.В., Старкова А.Г. Средний химический состав метеоритов // Метеоритика. 1956. Вып. 14. С. 38–56.
2. G.S. Hawkins, *Astron. J.*, 65, 318, 1960.
3. C.O.R. Jaschek, *The observatory*, 80, N 916, 119, 1960.
4. J. Joung, *J. Brit. Astr. Ass.*, 50, N 9, 309, 1940.
5. D.W. Arthur, *J. Brit. Astr. Ass.*, 64, N 3, 127, 1954.
6. Артур Дж. Визуальные наблюдения Луны // Новое о Луне. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 244.
7. Baldwin R.B. *The Face of the Moon*. Chicago, 1949.
8. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. .
9. Левин Б.Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М.: Советское радио, 1957.
10. Луна / под ред. А.В. Маркова. М.: Физматгиз, 1960.
11. Кащеев Б.Л., Дудник Б.С. и др. Влияние диффузии на радиолокационные измерения скорости метеоров // Ионосферные исследования (метеоры): сб. статей. Вып. 8. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
12. Физика верхней атмосферы. М.: Физматгиз, 1963.
13. Фиалко Е.И. Некоторые результаты исследования распределения метеорных тел по массам // *Астрономический циркуляр*. 1958, № 195. С. 22; *Астрономический журнал*. 1965. Т. 42. С. 409
14. Левин Б.Ю. Физическая теория метеоров и метеорное вещество в Солнечной системе. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
15. Татарский В.И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
16. Даниэлс Ф. Теория радиолокационного отражения от Луны и планет // *Радиолокация Венеры*. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С. 80.

УДК: 621.391

### 1.3. Спектральная плотность случайной последовательности подобных возмущений<sup>1</sup>

В большом числе радиотехнических задач приходится иметь дело с последовательностями импульсов, которые обладают свойством подобия: при некотором изменении высоты (максимального значения) пропорционально изменяются и все другие параметры импульса. Это относится, например, к последовательности треугольных импульсов, которые изменяются случайным образом по величине, но углы наклона переднего и заднего фронтов сохраняются постоянными. Таким же свойством обладает последовательность прямоугольных импульсов, у которых вместе с изменением величины пропорционально изменяется длительность импульса. Среди неэлектрических процессов можно отметить профиль сечения поверхности, покрытой случайно расположенными полусферическими выступами с некоторым распределением высот, и т. п.

При анализе прохождения подобных сигналов через радиоустройства, а также при изучении статистических свойств случайных полей возникает необходимость учета автокорреляционных или спектральных характеристик указанных последовательностей. Ниже будет найдена спектральная плотность  $F(\omega)$  таких последовательностей и показано, что при некоторых достаточно мягких условиях спектральная плотность последовательности не зависит от спектральной плотности индивидуального возмущения.

При анализе будет предполагаться, что последовательности аperiodические, и высоты импульсов независимы друг от друга. Для определенности будем также считать, что последовательности принадлежат к пуассоновскому типу, т. е. что распределение интегралов  $\mu$  между началами возмущений имеет экспоненциальный вид:  $\nu(\mu) = (1/T)e^{-\mu/T}$ , где  $T$  — среднее расстояние между началами импульсов (относительно  $T$  подробнее см. [1], § 11.1.3, последний абзац).

Общее выражение для спектральной плотности импульсной последовательности имеет вид ([1], формула (11.5)):

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} m_1 \left\{ \left| \sum_{n=-N}^N \xi_n^{(k)} \tau_n^{(k)} g(\omega \tau_n^{(k)}) e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}} \right|^2 \right\}, \quad (1.3.1)$$

где  $\xi_n^{(k)}$  — высота (максимальное значение)  $n$ -го импульса  $k$ -й реализации;  $\tau_n^{(k)}$  — условная длина (длительность) этого же импульса;  $g(\omega \tau_n^{(k)})$  — спектральная плотность (преобразование Фурье) импульса единичной величины с длительностью  $\tau_n^{(k)}$  и  $t_{2n}^{(k)}$  — момент начала рассматриваемого импульса;  $m_1$  — обозначение операции усреднения;  $N$  — число импульсов в последовательности.

Для подобных возмущений характерно, что высота  $\xi_n^{(k)}$  и длина  $\tau_n^{(k)}$  связаны соотношением

$$\xi_n^{(k)} / \tau_n^{(k)} = \eta, \quad (1.3.2)$$

<sup>1</sup> Радиотехника и электроника. 1967. С. 1274–1277.

где  $\eta$  — параметр, аналогичный критерию подобия (хотя и может быть размерной величиной), сохраняющийся постоянным для всех  $n$  и  $k$ .

Раскрывая квадрат суммы в (1.3.1) и производя операцию усреднения с учетом (1.3.2), получим (см. [1], вывод (11.12)):

$$F(\omega) = \frac{2}{T\eta^2} m_1 \left\{ \left( \xi^{(k)} \right)^4 \left| g \left( \omega \frac{\xi^{(k)}}{\eta} \right) \right|^2 \right\} + \frac{2}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{q}{2N+1} \right) [h_q(\omega) + h_q(-\omega)], \quad (1.3.3)$$

где

$$h_q(\omega) = \frac{1}{\eta^2} m_1 \left\{ \left( \xi_n^{(k)} \right)^2 \left( \xi_j^{(k)} \right)^2 g \left( \omega \frac{\xi_n^{(k)}}{\eta} \right) \overline{g \left( \omega \frac{\xi_j^{(k)}}{\eta} \right)} e^{-i\omega [t_{2n}^{(k)} - t_{2j}^{(k)}]} \right\},$$

черта сверху обозначает комплексное сопряжение. В силу статистической независимости всех сомножителей в  $h_q(\omega)$  и учитывая, что от  $q = n - j$  зависит только последний сомножитель, под знаком  $\lim$  останется выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{q}{2N+1} \right) m_1 \left\{ \exp \left( -i\omega \sum_{r=j}^n \mu_r^{(k)} \right) + \exp \left( i\omega \sum_{r=j}^n \mu_r^{(k)} \right) \right\} = \\ = \sum_{q=1}^n \left( 1 - \frac{q}{2N+1} \right) [\Theta_{\mu}^q(\omega) + \Theta_{\mu}^q(-\omega)], \end{aligned} \quad (1.3.3')$$

где  $\theta_{\mu}(\omega)$  — характеристическая функция распределения  $\nu(\mu)$ . Здесь учтено, что среднее значение четырех первых сомножителей  $h_q(\omega)$  не зависит от знака при  $\omega$  и поэтому оно с  $\omega$  и  $-\omega$  может быть вынесено из-под знака суммирования.

Заменяя квадратную скобку в (1.3.3') через  $2\text{Re } \Theta_{\mu}^q(\omega)$ , можем найти, что при  $\omega \neq 0$  и  $N \rightarrow \infty$  (1.3.3') перейдет в  $\text{Re} [\Theta_{\mu}(\omega)/(1 - \Theta_{\mu}(\omega))]$  (см. [1], § 11.1.3, формула (11.44) и далее).

Характеристическая функция экспоненциального распределения равна  $1/(1 - i\omega T)$ , что дает:

$$\text{Re} [\Theta_{\mu}(\omega)/(1 - \Theta_{\mu}(\omega))] = \text{Re} [i/\omega T] = 0.$$

Это означает, что при  $\omega \neq 0$  второе слагаемое в (1.3.3) равно нулю. При  $\omega = 0$  и  $N \rightarrow \infty$  (1.3.3') может быть выражено через  $\delta$ -функцию, что дает единственную дискретную составляющую спектра, равную постоянной составляющей процесса. В дальнейшем мы эту составляющую будем опускать.

Плотность распределения высот возмущений в некотором диапазоне размеров  $\xi_{\text{мин}} - \xi_{\text{макс}}$  зададим функцией  $w(\xi)$ . Тогда окончательно вместо (1.3.3) получим ( $\omega \neq 0$ ):

$$F(\omega) = \frac{2}{T\eta^2} \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} \xi^4 \left| g \left( \omega \frac{\xi}{\eta} \right) \right|^2 w(\xi) d\xi. \quad (1.3.4)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. При степенном законе распределения  $w(\xi)$ , т. е. при  $w(\xi) = A\xi^{-p}$ , где  $\xi > 0$  получим, заменяя  $\omega(\xi/\eta)$  на  $x$ :

$$F(\omega) = \frac{2A\eta^{3-p}}{T\omega^{5-p}} \int_{(\omega/\eta)\xi_{\min}}^{(\omega/\eta)\xi_{\max}} x^{4-p}|g(x)|^2 dx. \quad (1.3.5)$$

В этом выражении пределы интегрирования зависят от частоты, поэтому спектральная плотность в общем случае определяется не только показателем  $5 - p$ , но и переменным значением интеграла. Но если диапазон изменений длительностей возмущений  $\tau_{\min} - \tau_{\max}$ , определяемый распределением  $w(\xi)$ , настолько велик, что для некоторого частотного интервала  $\omega_{\min} - \omega_{\max}$  справедливы соотношения

$$\omega_{\max}\xi_{\min}/\eta = \omega_{\max}\tau_{\min} \ll 1, \quad (1.3.6a)$$

$$\omega_{\min}\xi_{\max}/\eta = \omega_{\min}\tau_{\max} \gg 1, \quad (1.3.6b)$$

то можно ввести следующие приближения.

Так как величина  $g(x)$  не существенна при значениях  $x$ , много больших и много меньших единицы, то при любом характере стремления  $g(x)$  к нулю с уменьшением  $x$ , если  $p < 4$ , нижний предел в силу (1.3.6a) может быть приближенно заменен нулем.

Вследствие того же свойства  $g(x)$  и неравенства (1.3.6b) верхний предел можно отодвинуть в бесконечность, если только при этом интеграл не становится расходящимся. В противном случае верхним пределом следует оставить  $\omega_{\text{ср}}(\xi_{\max}/\eta)$ , где  $\omega_{\text{ср}}$  — некоторая средняя частота, точное значение которой в пределах  $\omega_{\min} - \omega_{\max}$  незначительно влияет на величину интеграла. Погрешности при такой замене будут малы, если будет выполнено неравенство

$$\int_0^{\frac{\omega_{\max}\xi_{\min}}{\eta}} x^{4-p}|g(x)|^2 dx + \int_{\frac{\omega_{\min}\xi_{\max}}{\eta}}^M x^{4-p}|g(x)|^2 dx \ll \int_0^M x^{4-p}|g(x)|^2 dx, \quad (1.3.6в)$$

где  $M$  равно или  $\infty$ , или  $\omega_{\text{ср}}(\xi_{\max}/\eta)$ . В любом случае теперь интеграл в (1.3.5) становится числовым множителем, независящим от частоты. Но это только в интервале частот, удовлетворяющем неравенствам (1.3.6a) и (1.3.6b). Вне этого интервала никакой гарантии в выполнении неравенства (1.3.6в) не существует.

Теперь вместо (1.3.5) можем написать:

$$F(\omega) = \frac{2A\eta^{3-p}}{T\omega^{5-p}} \int_0^M x^{4-p}|g(x)|^2 dx, \quad (1.3.7)$$

откуда следует, что в частотном интервале, определенном из (1.3.6a) и (1.3.6b), частотный характер спектральной плотности последовательности возмущений с точностью до коэффициента не зависит от вида спектральной плотности самого возмущения.

2. В частном случае кубического распределения, когда  $p = 3$ , спектральная плотность последовательности не зависит также и от параметра  $\eta$ . В этом случае

имеем:

$$F(\omega) = \frac{2A}{T\omega^2} \int_0^{\infty} x |g(x)|^2 dx, \quad (1.3.8)$$

где интеграл при условии  $\int_0^{\infty} |g(x)| dx < \infty$  будет всегда сходящимся.

Автокорреляционная функция такой последовательности в области больших и средних значений аргумента имеет экспоненциальный вид.

3. Если плотность распределения  $w(\xi)$  не является степенной функцией (например, в случае рэлеевского или логарифмически-нормального распределения), то могут быть оценены участки спектра в области низких и высоких частот. В области низких частот функция  $|g(\omega \cdot \xi/\eta)|^2$  в (1.3.4) может быть представлена двумя членами разложения по степеням аргумента. Для функций спектральной плотности, имеющих в нуле первую производную, равную нулю, получим

$$F_{\text{н}}(\omega) \simeq F(0) + \frac{2a_2\omega^2}{T\eta^4} \int_0^{\infty} \xi^6 w(\xi) d\xi, \quad (1.3.9)$$

где  $\alpha_2 < 0$  — коэффициент второго члена разложения. Аналогично для функций распределения, равных нулю при  $\xi = 0$ , в области высоких частот получим

$$F_{\text{в}}(\omega) = \frac{2\eta^3}{T\omega^5} \int_0^{\infty} x^4 |g(x)|^2 w\left(\frac{\eta}{\omega}x\right) dx \simeq \frac{2\eta^3}{T\omega^5} \left( \beta_2 \frac{\eta}{\omega} \int_0^{\infty} x^5 |g(x)|^2 dx + \beta_3 \frac{\eta^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} x^6 |g(x)|^2 dx \right) \quad (1.3.10)$$

где  $\beta_2$  и  $\beta_3$  — коэффициенты у линейного и квадратичного членов разложения  $w(\xi)$  по степеням  $\xi$ . Практически преобладающим будет один из них, и приближенно частотная зависимость в (1.3.9) сохранится в виде либо  $\omega^{-6}$ , либо  $\omega^{-7}$ .

Таким образом, из (1.3.9) и (1.3.10) видно, что если функция  $g(x)$  в области низких частот и  $w(\xi)$  в точке  $\xi = 0$  обладают указанными выше свойствами, то спектральная плотность последовательности подобных возмущений в области низких и высоких частот тоже не зависит от вида спектральной плотности возмущения.

## Литература

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1966.

УДК: 621.371.162

## 1.4. Уточнение выражений для поля, рассеянного шероховатой поверхностью<sup>1</sup>

В задачах, связанных с отражением радиоволн от шероховатой границы ионосферных образований или от земной поверхности, когда длина волны по сравнению с размерами шероховатостей достаточно мала, используется приближение Кирхгофа. Условия его применимости подробно рассмотрены в [1], и специально на них останавливаться не будем.

Одна из первых работ по рассеянию на шероховатой поверхности [2], в которой подробно изложена физическая сторона вопроса, послужила отправной точкой для большого числа исследований как отечественных, так и зарубежных, основным результатам которых отведено значительное место в монографиях [1, 3, 4]. Но широкое использование результатов [2] осложняется следующими обстоятельствами:

а) В [5] отмечено, что полученная в [2] формула для рассеянного поля при устремлении размеров шероховатостей к нулю не переходит в выражение для поля, дифрагированного на плоской пластине. Указано также на некорректность вывода в [2] углового множителя. Эти замечания имеют большое значение, поэтому целесообразно их кратко прокомментировать.

Полученная в [2] формула (2) (обозначения даны ниже):

$$\iint \vec{n} \exp(i\vec{q}\vec{r}) dS = \frac{\vec{q}}{q_z} \iint \exp(i\vec{q}\vec{r}) dx dy,$$

являющаяся основой выражения для рассеянного поля, в общем случае неверна, так как правая часть не равна левой. Это следует из того, что направление левой части (обе части выражения являются векторами) при большой площади интегрирования и небольших наклонах поверхности весьма мало отличается от вертикали и определяется только свойствами поверхности; направление правой части всецело определяется углами на источник и приемник энергии, т. е. параметрами, которые можно произвольно изменять в широких пределах.

По абсолютной величине обе части выражения тоже не совпадают. При изменении взаимного расположения источника и наблюдателя множитель в правой части (величина  $\left| \frac{\vec{q}}{q_z} \right|$ ) меняется в пределах от 1 до  $\infty$ , в то время как множитель левой части при этом не изменяется. В предельном случае плоской поверхности, как и указано в [5], нарушение равенства очевидно. Это равенство приближенно справедливо лишь при  $|\vec{q}| \approx q_z$  и при углах, близких к средней нормали. На ограниченную применимость результатов [2] указано также в [6].

б) В электродинамических задачах рассеяния в большинстве случаев используется векторный аналог теоремы Грина и интегрирование производится или по полному полю над рассеивающей поверхностью или по полному току в ней. При этом пределы интегрирования ограничиваются размерами поверхности. При

<sup>1</sup> Радиотехника. 1969. № 11. С. 68–72

таким подходе в случае плоской задачи решение не удовлетворяет теореме взаимности и находится в противоречии с дифракцией на дополнительном экране, что было отмечено Л.А. Вайнштейном ([7] § 91). Более правильный подход заключается в интегрировании отраженного поля, при котором указанные противоречия устраняются [8].

В данном разделе приводится вывод формул для рассеянного поля, свободных от указанных выше недостатков. Эти формулы могут явиться исходными для получения углового спектра мощности.

Определим поле рассеяния  $E_p$  по формуле Стреттона и Чу ([9] § 8.14):

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{4\pi} \int_S \{i\kappa[\vec{n}\vec{H}]\psi + [[\vec{n}\vec{E}]\text{grad}\psi] + (\vec{n}\vec{E})\text{grad}\psi\} dS, \quad (1.4.1)$$

где  $\kappa = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали, направленный в теньевое полупространство,  $\psi = \exp(ikR)/R$ , а оператор grad действует в точке наблюдения.

В дальней зоне волна становится поперечной, поэтому последнее слагаемое в (1.4.1) стремится к нулю (строго этот член нейтрализуется поправкой Котлера, [9], § 8.15). В зоне Френеля такой компенсации в общем случае не происходит и может иметь место некоторая продольная составляющая поля. Однако при не очень малых расстояниях от поверхности эта составляющая по сравнению с поперечной столь ничтожна, что практически ее влиянием можно пренебречь.

Таким образом, будем искать  $\theta$ - или  $\varphi$ -составляющую поля  $\vec{E}_p$  в сферической системе координат с единичными векторами  $\vec{\theta}_1$ ,  $\vec{\varphi}_1$  и  $\vec{R}_1$  (рис. 1.4.1). Теперь запишем (1.4.1) в виде (индекс «p» в дальнейшем опускаем):

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \{i\kappa[\vec{n}\vec{H}^{\circ}]\psi - [[\vec{n}\vec{E}^{\circ}]\text{grad}\psi]\} dS, \quad (1.4.2)$$

где учтено, что коэффициент отражения равен единице и в соответствии с [8] произведена замена компонентов отраженного поля  $\vec{H}_{\text{отр}}$  и  $\vec{E}_{\text{отр}}$  на  $\vec{H}^{\circ}$  и  $-\vec{E}^{\circ}$  (индексом «ноль» сверху отмечены параметры падающей волны).

Наведенные на поверхности падающим полем электрические и магнитные токи в случае вертикальной поляризации имеют поверхностные плотности  $\vec{I}^e$  и  $\vec{I}^m$ , равные:

$$\left. \begin{aligned} \vec{I}^e &= -[\vec{n}\vec{H}^{\circ}] = n_z H_y^{\circ} \vec{x}_1 - n_x H_y^{\circ} \vec{z}_1, \\ \vec{I}^m &= [\vec{n}\vec{E}^{\circ}] = -n_y \frac{\kappa_x^{\circ}}{\kappa^{\circ}} H_y^{\circ} \vec{x}_1 + \left( n_z \frac{\kappa_z^{\circ}}{\kappa^{\circ}} H_y^{\circ} + n_x \frac{\kappa_x^{\circ}}{\kappa^{\circ}} H_y^{\circ} \right) \vec{y}_1 - n_y \frac{\kappa_z^{\circ}}{\kappa^{\circ}} H_y^{\circ} \vec{z}_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.3)$$

где  $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$  — единичные векторы декартовой системы координат,  $\kappa_x^{\circ}, \kappa_y^{\circ}, \kappa_z^{\circ}$  — проекции волнового вектора  $\vec{\kappa}^{\circ}$  падающей волны.

Проекции векторов плотностей токов на орты сферической системы координат равны:

$$\left. \begin{aligned} I_{\Theta}^{e,m} &= I_x^{e,m} \cos \Theta \cos \varphi + I_y^{e,m} \cos \Theta \sin \varphi - I_z^{e,m} \sin \Theta, \\ I_{\varphi}^{e,m} &= -I_x^{e,m} \sin \varphi + I_y^{e,m} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.4)$$

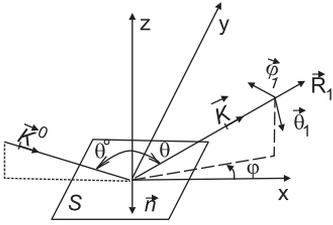


Рис. 1.4.1.

Из (1.4.3) и (1.4.4) получим:

$$\left. \begin{aligned} [\vec{n}\vec{H}^\circ]_\Theta &= -n_z H_y^\circ \cos \Theta \cos \varphi - n_x H_y^\circ \sin \Theta, \\ [[\vec{n}\vec{E}^\circ]\text{grad}\psi]_\Theta &= [[\vec{n}\vec{E}^\circ]_\varphi \text{grad}_R \psi] = -i\kappa\varphi H_y^\circ \left[ n_y \frac{\kappa_x^\circ}{\kappa_x^\circ} \kappa^\circ \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left( n_z \frac{\kappa_z^\circ}{\kappa_x^\circ} + n_x \frac{\kappa_x^\circ}{\kappa_x^\circ} \right) \cos \varphi \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.4.5)$$

где  $[\vec{n}\vec{E}^\circ]_\varphi$  и  $\text{grad}_R \psi$  — это те проекции указанных векторов, при векторном перемножении которых получается вектор, направленный по  $\vec{\theta}_1$ . В (1.4.6) учтено, что  $\text{grad}_R \psi = \text{grad} \psi \cos(\vec{R}_1, \text{grad} \psi) = -i\kappa\psi$  (другими словами, знак минус обусловлен тем, что положительное направление  $\text{grad} \psi$  противоположно  $\vec{R}_1$ ), а также использовано соотношение  $\vec{H}^\circ = [\kappa^\circ \vec{E}^\circ] / \kappa^\circ$ . Теперь (1.4.2) с учетом (1.4.5) принимает вид:

$$E_\theta = -\frac{i\kappa}{4\pi} \int_S H_y^\circ \psi \left\{ \cos \Theta \cos \varphi + \cos \Theta^\circ \cos \varphi + \frac{n_x}{n_z} (\sin \Theta - \sin \Theta^\circ \cos \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{n_y}{n_z} \sin \theta^\circ \sin \varphi \right\} n_z dS. \quad (1.4.6)$$

Здесь считается угол  $\theta$  положительным при отсчете его от оси  $z$  в положительную сторону оси  $x$ , а угол  $\theta^\circ$  — в отрицательную сторону оси  $x$  (рис. 1.4.1).

Далее можно, как это обычно делается, вывести все символы, выражающие расстояния, из-под интеграла при значении последних в начале координат, если они входят в амплитудные множители, и ограничиться в фазовых выражениях квадратичными членами. Тогда, обозначая расстояние от источника до текущей точки поверхности  $\rho$ , этой точки до наблюдателя  $R$  и от начала координат до текущей точки  $r$ , имеем (поверхность будем обозначать  $\xi(x, y)$ ) (рис. 1.4.2):

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{\rho}_0 + \vec{r}, & \vec{R} &= \vec{R}_0 - \vec{r}, \\ \rho &= |\vec{\rho}| = \sqrt{(x_\rho + x)^2 + y^2 + (z_\rho + \xi)^2} \approx \\ &\approx \rho_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 + \xi^2 + 2x_\rho x + 2z_\rho \xi}{\rho_0^2} \right), \\ R &= |\vec{R}| = \sqrt{(x_R - x)^2 + (y_R - y)^2 + (z_R - \xi)^2} \approx \\ &\approx R_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 + \xi^2 - 2x_R x - 2y_R y - 2z_R \xi}{R_0^2} \right), \end{aligned}$$

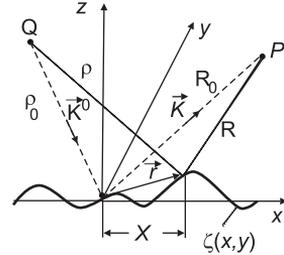


Рис. 1.4.2.

где  $x_\rho, z_\rho, x_R, y_R, z_R$  — проекции векторов  $\vec{\rho}$  и  $\vec{R}$  на оси координат. Считая амплитуду падающей волны равной единице и полагая

$$\frac{x_\rho}{\rho_0} = \kappa_x^0, \quad \frac{z_\rho}{\rho_0} = \kappa_z^0, \quad \frac{x_R}{R_0} = \kappa_x, \quad \frac{y_R}{R_0} = \kappa_y, \quad \frac{z_R}{R_0} = \kappa_z,$$

для произведения  $H_y^\circ \psi$  в (1.4.6) получим:

$$H_y^\circ \psi = -\frac{1}{R_0} \exp(i\omega t + i\kappa(R_0 + \rho_0)) \exp\left(i\kappa\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{R_0}\right) \frac{x^2 + y^2}{2} + i\vec{q}\vec{r}\right), \quad (1.4.7)$$

где использованы равенства:

$$(\kappa_x^\circ - \kappa_x)x + (-\kappa_y)y + (\kappa_z^\circ - k_z)\xi = \vec{\kappa}^\circ \vec{r} - \vec{\kappa} \vec{r} = \vec{q} \vec{r}; \quad \vec{q} = \vec{\kappa}^\circ - \vec{\kappa}$$

(чем больше отношение  $\rho_0$  и  $R_0$  к размерам площадки, тем эти равенства более справедливы. При  $\rho_0, R_0 \rightarrow \infty$  они тривиальны).

Подставляя (1.4.7) в (1.4.6) и используя очевидную замену

$$n_x/n_z = -\xi'_x, \quad n_y/n_z = -\xi'_y, \quad -n_z dS = dx \cdot dy,$$

где  $\xi'_x$  и  $\xi'_y$  — производные поверхности по направлениям  $x$  и  $y$ , получим:

$$E_\Theta = -\frac{i\kappa \exp(i\omega t + i\kappa(R_0 + \rho_0))}{4\pi R_0} - \int_x \int_y [\cos \Theta \cos \varphi + \cos \Theta^\circ \cos \varphi - \xi'_x (\sin \Theta - \sin \Theta^\circ \cos \varphi) + \xi'_y \sin \Theta^\circ \sin \varphi] e^{i\Psi} dx dy. \quad (1.4.8)$$

Здесь обозначено

$$\Psi = \kappa \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{R_0} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + q_x x + q_y y + q_z \xi. \quad (1.4.8')$$

Здесь  $q_x = k(\sin \theta^\circ - \sin \theta \cos \varphi)$ ,  $q_y = -\kappa \sin \theta \sin \phi$ ,  $q_z = -\kappa(\cos \theta^\circ + \cos \theta)$ .

Аналогично можно вычислить горизонтальную составляющую рассеянного поля  $E_{\theta\varphi}$  (первый из двух индексов обозначает поляризацию падающего поля):

$$E_{\theta\varphi} = -\frac{i\kappa}{4\pi R_0} \exp(i\omega t + i\kappa(R_0 + \rho_0)) \int_x \int_y [\sin \varphi + \cos \Theta^\circ \cos \Theta \sin \varphi + \xi'_x \cos \Theta \sin \Theta^\circ \sin \varphi - \xi'_y (\sin \Theta^\circ \cos \Theta \cos \varphi + \cos \Theta^\circ \sin \Theta)] e^{i\Psi} dx dy. \quad (1.4.9)$$

Таким же способом, каким были получены выражения (1.4.8) и (1.4.9) для случая горизонтальной поляризации падающего поля, можно получить составляющие рассеянного поля  $E_\varphi$  и  $E_{\varphi\theta}$  ( $E_{\varphi\theta}$  — ортогональная составляющая), в точности совпадающие по величине с  $E_\theta$  и  $E_{\theta\varphi}$ . При этом только знак у выражений для поля изменится на противоположный.

Таким образом, в рамках приближения Кирхгофа формулы (1.4.8) и (1.4.9) полностью определяют рассеянное поле при любой поляризации падающих волн.

Если теперь положить неровности равными нулю, т. е. приравнять нулю  $\xi(x, y)$  и  $\xi'(x, y)$ , то придем к случаю дифракции на идеально проводящем плоском экране конечных размеров. При этом в выражении для фазы  $\psi$  исчезнет член с  $\xi$ , а формулы для напряженности полей примут вид:

$$\left. \begin{aligned} E_\Theta &\sim (\cos \Theta + \cos \Theta^\circ) \cos \varphi \int_x \int_y e^{i\Psi_0} dx dy \\ E_{\Theta\varphi} &\sim (1 + \cos \Theta^\circ \cos \Theta) \sin \varphi \int_x \int_y e^{i\Psi_0} dx dy \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.10)$$

где  $\Psi_0$  — фаза  $\psi$  без последнего члена с  $\xi$  в (1.4.8'):  $\Psi = \Psi_0 + q_z \xi$ . Из (1.4.10) видно, что полученные выражения удовлетворяют теореме взаимности и совпадают

с полем дифракции на дополнительном отверстии [см., например [7], формула (87.14)].

## Литература

1. *Фейнберг Е.Л.* Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
2. *Исакович М.А.* Рассеяние волн статистически-шероховатой поверхностью // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. № 3. С. 305–314.
3. *Beckmann P., Spizzichino A.* The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. Oxford: Pergamon Press, 1963.
4. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
5. *Михайлов В.И.* К рассеянию электромагнитных волн на неровных поверхностях, // Украинский физический журнал. 1962. № 12.
6. *Кашин В.А., Меркулов В.В.* // Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9. Вып. 9.
7. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1957.
8. *Чернов Ю.А.* Об одном противоречии в теории дифракции // Радиотехника. 1966. Т. 21. № 7.
9. *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

УДК: 537.874.4

### 1.5. Эквивалентность полных и приведенных фазовых набегов в задачах о рассеянии волн<sup>1</sup>

В задачах рассеяния волн в случайной среде участвует величина случайного набег фазы, стандартное отклонение которого при сильных флуктуациях показателя преломления может составлять десятки радиан.

В этом случае при любом законе распределения величины полного набег фазы, распределение, приведенное к интервалу  $0 \div 2\pi$ , стремится к равномерному с предельной дисперсией  $\sigma_{\text{макс}}^2 = \pi^2/3$ . При анализе взаимодействия волн принимается во внимание распределение фаз на интервале  $0 \div 2\pi$ , которое физически обуславливает конкретные результаты интерференции (случайные или детерминированные). Разность фаз в двух разнесенных точках может достигать многих радиан, значительно превосходя величину  $2\pi$ . Дисперсия этой разности также может во много раз превосходить предельную дисперсию  $\pi^2/3$  для приведенного распределения. Из анализа, содержащегося в опубликованных работах по этому вопросу, не очевидно, будут ли результаты решения какой-либо статистической задачи электродинамики в этих случаях (с неограниченной дисперсией и дисперсией, ограниченной величиной  $\pi^2/3$ , одинаковыми, или они должны быть различными). Поэтому представляется, что вопрос о правомочности использования значений полных набегов фаз (не приведенных предварительно к интервалу

<sup>1</sup>Труды НИИР. 1991. № 2. С. 24–26.

$0 \div 2\pi$ ) в задачах о рассеянии волн требует специального обоснования, попытка которого сделана ниже.

Обычный ход рассуждений на начальной стадии анализа рассеяния волн в первом случае (с неограниченным полным набегом фаз) сводится к следующему.

Допустим, после прохождения фазового экрана имеем плотность распределения полного набега фазы  $w(\varphi)$  с дисперсией  $\sigma_\varphi^2$ , где  $\varphi(x, y)$  — полный набег фазы в точке  $x, y$ . Тогда непосредственно за экраном напряженность поля, его характеристическая функция и функция автокорреляции записываются в виде (высоко частотная составляющая опущена):

$$\begin{aligned} E(x, y) &= e^{i\varphi(x, y)}, \\ \theta(1)_\varphi &= e^{\overline{i\varphi(x, y)}}, \\ \rho_E(r) &= \overline{E_1 E_2^*} = e^{\overline{i[\varphi_2(x_2, y_2) - \varphi_1(x_1, y_1)]}}. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Далее принимается, что распределение фаз подчиняется нормальному закону, так как только при этом предположении дальнейшие вычисления становятся достаточно простыми.

В случае приведения фазовых набегов и разностей фаз к интервалу  $0 \div 2\pi$  вопрос сводится к использованию намотанных распределений [1, 2]. Для исходного распределения полного набега фаз  $w(\varphi)$ , где  $\varphi$  — может быть также и разностью фаз  $\phi_2 - \phi_1$ , намотанное распределение выражается формулой:

$$w_H(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(\varphi + 2\pi n).$$

Характеристическая функция  $\theta_H(p)$  произвольного намотанного распределения имеет вид:

$$\theta_H(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ip2\pi n} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{ipy} w(y) dy. \quad (1.5.2)$$

Ключевым моментом является следующее.

Для целочисленных значений  $p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  и только для них, как показано в Приложении, выражение (1.5.2) переходит в характеристическую функцию  $\theta(p)$  исходного распределения на прямой:

$$\theta_H(p) = \theta(p), \quad (1.5.3)$$

где  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Если теперь (1.5.1) записать в виде

$$\rho_E(r) = e^{\overline{i[\phi_2(x_2, y_2) - \phi_1(x_1, y_1)]p}} \quad (1.5.4)$$

и положить  $p = 1$ , то можно видеть, что характеристическая функция (1.5.4) разности неограниченных набегов фаз  $\phi_2 - \phi_1$  в точности совпадает с характеристической функцией намотанного распределения разности фаз (1.5.3), (1.5.1), если в ней положить  $p = 1$ .

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом.

Два рассмотренных выше подхода при вычислении характеристической функции эквивалентны.

При анализе взаимодействия волн со случайной фазой, по крайней мере на этапе вычисления характеристических функций распределения фаз или их разностей, может быть использована характеристическая функция исходного распределения полного набег фаз с соответствующей дисперсией, не ограниченной величиной  $\pi^2/3$ .

### **Приложение. Дополнительные характеристики намотанного нормального распределения для практических приложений**

Имеющаяся литература не вполне отражает необходимые в практических приложениях характеристики намотанных распределений (см., например, [1]). Ниже приводится более полное представление характеристик одного из наиболее часто встречающихся распределений — намотанного нормального.

Намотанное распределение  $w_H(x)$  образуется из обычного распределения на прямой  $w(x)$  по следующей формуле:

$$w_H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(x + 2\pi n).$$

Плотность распределения вероятностей (п.р.в.) намотанного нормального распределения может быть образована из нормального распределения на прямой  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}$ , которое переносится на окружность. При этом плотность распределения намотанного распределения со средним значением, равным нулю, имеет вид:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x + 2\pi n)^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\pi \leq x < \pi, \quad (\text{П.1.5.1})$$

где  $x$  — случайная величина,  $\sigma^2$  — дисперсия исходного распределения на прямой.

При малых значениях  $\sigma$  в выражении (П.1.5.1) может быть оставлен только один член с  $n = 0$ , при этом намотанное распределение практически совпадает с распределением на прямой.

При больших  $\sigma \rightarrow \infty$  шаг по  $n$ , равный  $2\pi/\sigma$ , стремится к нулю, и суммирование в (П.1.5.1) можно заменить интегрированием по  $n$ , после чего получим  $w(x) = \frac{1}{2\pi}$ , т. е. равномерное распределение.

Рассмотрим характеристическую функцию произвольного намотанного распределения  $\theta_H(p)$ . По обычным правилам получим:

$$\theta_H(p) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(x + 2\pi n) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ip2\pi n} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{ipy} w(y) dy. \quad (\text{П.1.5.2})$$

Если  $p$  равно целому числу, то это выражение упрощается:

$$\theta_H(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{ipy} w(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipy} w(y) dy = \theta(p), \quad (\text{П.1.5.3})$$

где  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\theta(p)$  — характеристическая функция исходного распределения на прямой.

Полученный результат может быть кратко сформулирован в виде следующей полезной в дальнейшем теоремы.

*Значения характеристической функции  $\theta_H(p)$  намотанного распределения в точках, где  $p$  целочисленно, и только в этих точках, совпадают со значениями характеристической функции исходного распределения на прямой.*

Этот вопрос рассматривается в [1] (п. 3.4.8в), но в формулировке результата отсутствует обязательное требование целочисленности  $p$ , что может в ряде случаев приводить к недоразумениям<sup>1</sup>.

Характеристическая функция для любых значений  $p$  может быть найдена с помощью этой теоремы.

Запишем п.р.в. через обратное преобразование Фурье от характеристической функции:

$$w_H(x) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \theta_H(q) \cos qx \right). \quad (\text{П.1.5.4})$$

Подставляя (П.1.5.4) в (П.1.5.2) и учитывая, что для целых  $q$  по вышеприведенной теореме  $\theta_H(q) = \theta(q)$ , и что для нормального распределения  $\theta(q) = \exp -\frac{1}{2}q^2\sigma^2$ , получим:

$$\begin{aligned} \theta(p) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ip2\pi n} \frac{1}{2} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{ipy} \left( 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2\sigma^2} \cos qy \right) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ip2\pi n} \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2\sigma^2} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{ipy} \cos qy dy. \end{aligned} \quad (\text{П.1.5.5})$$

В первом слагаемом второго равенства (П.1.5.5) интегрирование приведено к одному основному обороту ( $n = 0$ ), поэтому знак суммирования по  $n$  можно опустить (так как  $x = 0$  везде, где  $n \neq 0$ ). Второе слагаемое на этом же основании приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos(qx + 2\pi nq) dx = \\ = \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2\sigma^2} \left[ \frac{\sin(p-q)\pi}{(p-q)\pi} + \frac{\sin(p+q)\pi}{(p+q)\pi} \right]. \end{aligned}$$

В итоге характеристическая функция намотанного нормального распределения

<sup>1</sup> В [1] при определении характеристической функции случайного угла (п. 3.2.1) высказано утверждение, что само понятие характеристической функции случайного угла имеет смысл только для целочисленных  $p$ . С этим мнением нельзя согласиться, так как любое намотанное распределение может рассматриваться, отвлекаясь от его происхождения, как распределение, определенное на отрезке прямой в интервале  $(-\pi; \pi)$  со всеми известными свойствами таких распределений, в число которых входит и существование характеристических функций, определенных для любых действительных значений  $p$ .

для произвольных  $p$  и  $\sigma$  получим в виде:

$$\theta_H(p) = \frac{\sin \pi p}{\pi p} + \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2\sigma^2} \left[ \frac{\sin \pi(p-q)}{\pi(p-q)} + \frac{\sin \pi(p+q)}{\pi(p+q)} \right]. \quad (\text{П.1.5.6})$$

Легко проверить, что обратным преобразованием Фурье полученная характеристическая функция переводится в распределение (П.1.5.4).

Из выражения (П.1.5.6) видно, что при  $p$  целых в соответствии с теоремой  $\theta_H(p)$  сводится к  $\exp(-p^2\sigma^2/2)$ , так как слагаемые в квадратных скобках отличны от нуля только при  $p = q$  (первое) или  $p = -q$  (второе). При  $\sigma \rightarrow \infty$  п.р.в. стремится к равномерной, а характеристическая функция (П.1.5.6), что и следовало ожидать, переходит в  $\frac{\sin \pi p}{\pi p}$ .

Для практических расчетов могут оказаться полезными оценки плотности распределения и второго центрального момента.

Плотность распределения намотанного нормального распределения при  $-\pi \leq x < \pi$  (со средним значением, равным нулю) может быть принята в виде:

$$w_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}, & \sigma \leq 1, \\ \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2(e^{-0,5\sigma} \cos x + e^{-2\sigma^2} \cos 2x) \right], & \sigma \geq 1. \end{cases} \quad (\text{П.1.5.7})$$

Здесь во второй строчке оставлено два первых числа разложения (П.1.5.4). Ошибка при любых значениях  $\sigma$  в области больших значений  $w_H(x)$  не превышает 1,5%.

В теории распределений на окружности в качестве круговой дисперсии случайного угла  $\theta$  условились считать величину  $\nu(\nu)$ , равную среднему значению выражения  $1 - \cos(\theta - \nu)$ , где  $\nu$  — фиксированный угол (см. [1], п. 3.3.2). При этом  $\nu(\nu)$  изменяется в пределах  $0 \div 1$ .

Однако в большом числе задач используется дисперсия в обычном понимании, т. е. величина второго центрального момента.

Второй центральный момент  $M_{2H}(\sigma)$  распределения (П.1.5.1) может быть записан в виде:

$$M_{2H}(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \exp \left[ -\frac{(x+2\pi n)^2}{2\sigma^2} \right] dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n).$$

Общий член суммы имеет вид:

$$a(n) = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \left\{ (2n-1)e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{2\sigma^2}} - (2n+1)e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{\sigma^2 + 4\pi^2 n^2}{2} \left[ \Phi \left( \frac{\pi(2n+1)}{2} \right) - \Phi \left( \frac{\pi(2n-1)}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad (\text{П.1.5.8})$$

где  $\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

При небольших значениях  $\sigma$  вплоть до  $\sigma = 1$  можно в (П.1.5.8) оставить один член с  $n = 0$ . Ошибка при  $\sigma = 1$  не превышает единиц процентов.

Поэтому для малых  $\sigma$  имеем:

$$M_{2H}(\sigma) = \sigma^2, \quad \sigma \leq 1. \quad (\text{П.1.5.9})$$

При больших  $\sigma$  можно воспользоваться записью намотанного распределения в виде (П.1.5.3).

Учитывая, что суммирование в (П.1.5.3) производится по целым  $p$  можно применить полученную выше теорему и заменить  $\theta_H(p)$  на  $\theta(p) = \exp -\frac{1}{2}p^2\sigma^2$ . При этом  $M_{2H}(\sigma)$  может быть записано в виде (аналогичный результат для этого частного случая получен в [1], п. 4.3.2.в):

$$M_{2H}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}p^2\sigma^2} \cos px\right) dx = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}. \quad (\text{П.1.5.10})$$

Полученный ряд в (П.1.5.8) при больших  $\sigma$  сходится быстро. При  $\sigma \geq 1$  достаточно оставить два первых члена суммы, чтобы ошибка была меньше 1%. В этом случае (П.1.5.8) принимает вид:

$$M_{2H}(\sigma) = \frac{\pi^2}{3} - 4e^{-\frac{\sigma^2}{2}} + e^{-2\sigma^2}, \quad \sigma \geq 1. \quad (\text{П.1.5.11})$$

Таким образом, выражения (П.1.5.10) и (П.1.5.11) вместе дают величину  $M_{2H}(\sigma)$  намотанного нормального распределения для любых значений  $\sigma$  с весьма высокой точностью.

## Литература

1. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. М.: Наука, 1978.
2. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.

УДК: 523.4–77

## 1.6. Скорректированные угловые спектры локационных радиосигналов, отраженных Луной<sup>1</sup>

В настоящее время интерес к рассеянию волн неровной поверхностью непрерывно возрастает в силу его большого влияния на работу радиолиний различных систем связи, требования к которым предъявляются все более жесткие. Это относится как к акустическим и гидроакустическим системам, так и к радиосистемам практически всех диапазонов волн.

Для проверки точности и сравнительной оценки методов расчета характеристик рассеянного поля, а также использующихся в этих методах моделей рассеивающей поверхности необходим широкий набор экспериментальных данных, полученных в одинаковых условиях в различных диапазонах волн. Одним из таких подходящих практических результатов является семейство угловых спектров рассеянной мощности, полученных при радиолокации Луны в диапазоне от миллиметровых до декаметровых волн (см. [1, 2] и библ. там же). Эти данные получили широкое распространение как в монографической литературе, так и в различных журналах. Они используются как эталонные экспериментальные спектры рассеяния от поверхности с максимально возможным усреднением по ансамблю реализаций, в частности для изучения структуры самой поверхности и процессов, участвовавших при ее образовании.

Однако отмеченное выше семейство спектров, если его рассматривать как единый ансамбль и привлекать для анализа характеристик поверхности, требует существенной коррективы.

Ниже анализируются причины систематических погрешностей экспериментальных кривых, полученных при радиолокации Луны, и приводятся скорректированные экспериментальные угловые спектры.

При импульсной локации Луны, если импульс широк или представляет собой единичный скачок, огибающая отраженного сигнала  $V_1(t)$  имеет такой же вид, как если бы импульс прошел через узкополосный фильтр низких частот (рис. 1.6.1 кривая 1). Если импульс с длительностью  $\tau_n$  относительно короткий, то обратный сигнал  $V_2(t)$  принимает вид, показанный кривой 2 на рис. 1.6.1. Он состоит из двух частей — фронт нарастает по кривой 1 до точки  $\alpha_0$ , затем спадает по кривой 2 (везде далее имеются в виду только мощностные характеристики сигнала):

$$V_2(t) = V_1(t) - V_1(t - \tau_n).$$

В работах по локации Луны исследуется только кривая 2, которая фиксируется при приеме и считается угловым спектром мощности  $P(\Theta)$ , где  $\Theta = \arccos(1 - ct/2r)$  — угол между нормалью к средней поверхности и направлением на радиолокатор,  $c$  и  $r$  — скорость света и радиус планеты соответственно. Именно таким путем получены кривые, приведенные в [1, 2] или других оригинальных работах.

<sup>1</sup> Изв. вузов. Радиофизика. 1995. № 10. С. 1033–1039.

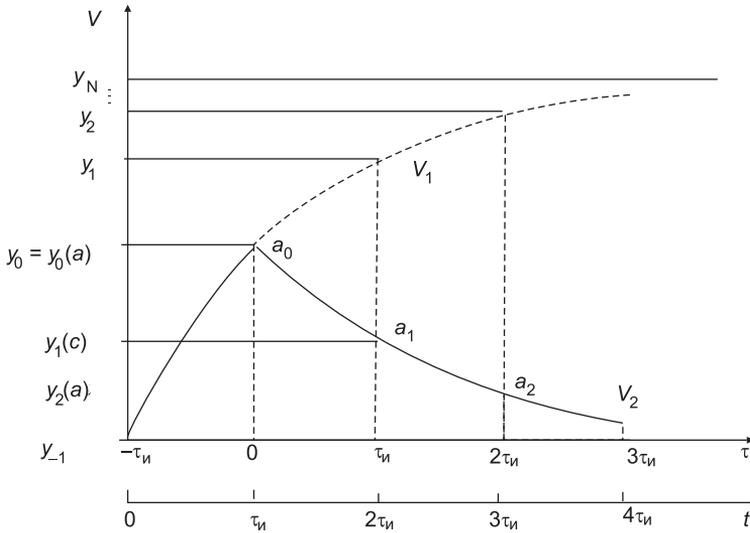


Рис. 1.6.1.

При использовании импульса конечной длительности для локализации искривленных в среднем поверхностей всегда будет происходить интегрирование в пределах углового сектора, соответствующего полуширине импульса. Чтобы получить угловой спектр рассеяния с наибольшей точностью, необходимо использовать максимально короткий импульс, в пределе —  $\delta$ -функцию. Ограничением здесь является только невозможность технической реализации. Но  $\delta$ -функция есть производная от функции единичного скачка, поэтому в идеальном случае, учитывая линейность процесса обратного рассеяния, точным выражением для  $V_2(t)$  будет производная огибающей обратного сигнала от излученного единичного скачка,  $V_2(t) = V_1'(t)$ . Практически необходимо использовать такую длительность импульса, на протяжении которой производная огибающей отклика от единичного скачка будет меняться лишь в небольших заданных пределах.

Во многих случаях этого достичь не удастся. Однако реальная зависимость интенсивности рассеянного сигнала от времени, а затем и угловой спектр могут быть с достаточной степенью точности восстановлены следующим путем.

Исходя из рис. 1.6.1, можно составить системы равенств для огибающих и ее производной:

$$\left. \begin{aligned} y_0(a) &= y_0 - y_{-1}(t = 0), & y_0'(a) &= y_0' - y'(t = 0), \\ y_1(a) &= y_1 - y_0, & y_1'(a) &= y_1' - y_0', \\ y_2(a) &= y_2 - y_1, & y_2'(a) &= y_2' - y_1', \\ &\vdots & &\vdots \\ y_N(a) &= y_N - y_{N-1}, & y_N'(a) &= y_N' - y_{N-1}' \end{aligned} \right\}. \quad (1.6.1)$$

Здесь отсчеты  $y$  на шкале  $V$  соответствуют точкам  $\tau_n, 2\tau_n, \dots$  на шкале  $\tau$ ; аргумент  $\tau$  введен только для указания на кривую 2 в отличие от кривой 1, для которой  $y$  — без аргумента.

Если теперь просуммировать все строчки в каждой системе (учитывая, как следует из рис. 1.6.1, что  $y_0 = y_0(a)$  и  $y_{-1}(t = 0) = 0$ ), то получим:

$$\sum_1^N y_n(a) = y_N - y_0, \quad \sum_1^N y'_n(a) = y'_N - y'(t=0). \quad (1.6.2)$$

Здесь  $y_N$  — неизвестное максимальное значение огибающей, соответствующее непрерывному облучению,  $y'(t=0)$  — производная огибающей в начале пришедшего импульса,  $y'_N$  — производная огибающей в установившемся режиме, обычно  $y'_N = 0$ ,  $y_0$  — максимальное значение принимаемого обратного сигнала, соответствующее  $t = \tau_n$ . Это значение принимается за единицу, и относительно него строится убывающая часть сигнала  $V_2(\Theta)$  или  $t$  для  $t \geq \tau_n$ .

Сумма, стоящая в левой части (1.6.2), легко получается из экспериментальной кривой 2 (рис. 1.6.1) как отсчеты уровней сигнала или его производной в точках, равномерно расположенных на оси времени с шагом  $\tau_n$ . Чтобы восстановить отклик на единичный скачок, надо, как следует из (1.6.1), сначала получить  $y_1$ , для чего к значению  $y_0$  (начальное значение кривой 2) прибавить  $y_1(a)$ , затем получить  $y_2$ , для чего вычислить сумму  $y_1(a) + y_2(a)$ , и так далее. Таким образом, восстановление может быть осуществлено дискретно только в точках через интервал  $\tau_n$ .

Аналогично в тех же точках может быть восстановлена зависимость производной огибающей от  $t$ . Чтобы определить начальное значение производной  $y'(t=0)$ , необходимо, как следует из (1.6.2), получить сумму производных в точках, отстоящих одна от другой на  $\tau_n$  по всей кривой 2, начиная с ее начальной точки (максимума)  $t = \tau_n$ . Производные в последующих точках определяются в соответствии с итерационной системой (1.6.1).

Нормированную кривую  $V_2(t)$  получим, если производные во всех точках кривой 1 через шаг  $\tau_n$  поделим с учетом (1.6.2) на начальное значение производной при  $t = 0$ .

$$V_2(t=0) = 1, \quad V_2(\tau_n) = \frac{y'_0}{y'(t=0)} = 1 + \frac{y'_0(a)}{y'(t=0)},$$

$$V_2(2\tau_n) = 1 + \frac{y'_0(a) + y'_1(a)}{y'(t=0)}, \dots, V_2(n\tau_n) = 1 + \left( \sum_0^{n-1} y'_i(a) \right) / y'(t=0).$$

Производные  $y'_i(a)$  отрицательны, поэтому последовательность  $V_2(n\tau_n)$  при монотонном уменьшении кривой 2 будет также монотонно убывающей.

Таблица 1.6.1.

| $\lambda$ , см | $\tau_n$ , мс | $R$ | $k$  | источник |
|----------------|---------------|-----|------|----------|
| 0,86           |               | 3   | 4    | [2]      |
| 3,6            | 0,03          | 21  | 3,6  | [1]      |
| 23             |               | 55  | 2    | [4, 5]   |
| 68             | 0,012         | 85  | 0,95 | [1]      |
| 600            | 0,1           | 165 | 0,03 | [3]      |
| 1130           | 0,25          | 200 | 0,03 | [6]      |

Из рассмотренного следует, что кривые радиолокационного рассеяния планет, полученные импульсным методом, являются лишь промежуточными вспомогательными кривыми с помощью которых с некоторым приближением могут быть восстановлены истинные угловые спектры  $V_2(\Theta)$ , где  $\Theta$  связано с  $t$ , как указано выше.

Отметим, что если импульс настолько широк, что при его окончании уровень отклика приближается к предельному, то кривая 2 практически повторит в перевернутом виде кривую 1 рис. 1.6.1, начинающуюся с  $t = 0$ . Это означает, что  $V_2(t) \approx V_1(\infty) - V_1(t - \tau_n)$ ,  $t \geq \tau_n$ .

В этом случае  $V_2[t(\Theta)]$  не представляет собой угловой спектр  $V_1'[t(\Theta)]$ , а является интегралом от искомой кривой. Рассмотрим с этих позиций результаты радиолокации Луны [1, 2].

На рис. 1.6.2 представлены нормированные зависимости величины обратного рассеяния  $P(\Theta)$  от угла падения на среднюю поверхность  $\Theta$  [1–4]. Здесь  $\Theta = 0$  соответствует  $\tau = 0$ , т. е. началу кривой 2 рис. 1.6.1. Для каждой экспериментальной зависимости получена весьма точная аппроксимация Бекмана [2], выражающаяся формулой

$$P(\Theta) = (\cos^4 \Theta + R \sin^2 \Theta)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{1}{4} (\text{tg } \Theta) \text{erfc}(k \cdot \text{ctg } \Theta) \right],$$

$$\text{erfc}(k \cdot \text{ctg } \theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{k \text{ ctg } \Theta}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad \Theta = \arccos \left( 1 - \frac{ct}{2r} \right). \quad (1.6.3)$$

Эта аппроксимация позволяет получить необходимые значения  $y_n$  и  $y'_n$  для восстановления  $V_1(t)$  и  $V_1'(t)$ . Производная от  $P(\Theta)$  по  $t$  может быть получена в виде:

$$P'(t) = -P(\Theta) \left\{ \frac{3}{2} (\cos^4 \Theta + R \sin^2 \Theta)^{-1} (R - 2 \cos^2 \Theta) \sin 2\Theta + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{\sqrt{\pi} \sin 2\Theta} e^{-(k \text{ ctg } \Theta)^2} + \frac{\text{erfc}(k \cdot \text{ctg } \Theta)}{4 \cos^2 \Theta} \right\} \frac{c}{2r \sqrt{\frac{ct}{r} - \left(\frac{ct}{2r}\right)^2}},$$

$$t \leq 11,6 \text{ мсек.} \quad (1.6.4)$$

Основные характеристики сигналов и аппроксимирующих функций приведены в табл. 1.6.1. Для всех приведенных спектров проведены расчеты по (1.6.1)–(1.6.2), для которых необходимые значения  $y_n(a)$  и  $y'_n(a)$  через соответствующие интервалы  $\tau_n$  вычислялись из (1.6.3) и (1.6.4). Учитывалось, что в данном случае  $y_0 = 1$ , так как экспериментальные кривые нормированы на максимальное значение функции рассеяния. При этом  $y_N$  выражалось в разгах относительно  $y_0$ . Результаты расчетов приведены на рис. 1.6.2 штриховыми кривыми. Сопоставляя между собой исходные и скорректированные кривые, можно отметить, что в тех случаях, где использовался короткий импульс ( $\lambda = 3,6$  см; 10 см; 23 см) кривые практически не изменились. Для  $\lambda = 68$  см изменения составили  $\approx 1$  дБ. Наибольшие изменения претерпели кривые для  $\lambda = 6$  м и 11,3 м. В последнем случае различие в области углов 40–50° превысило 11 дБ. Такие изменения связаны с тем, что длительность импульсов в двух последних случаях (для  $\lambda = 6$  м и 11,3 м) составляет 100 мкс и 250 мкс, т. е. намного больше, чем начальный линейный участок переднего фронта сигнала, не превышающий примерно 10 мкс. В этих условиях кривые для  $\lambda = 6$  м и 11,3 м, приведенные в [2] являются по существу интегралами от искомым функций.

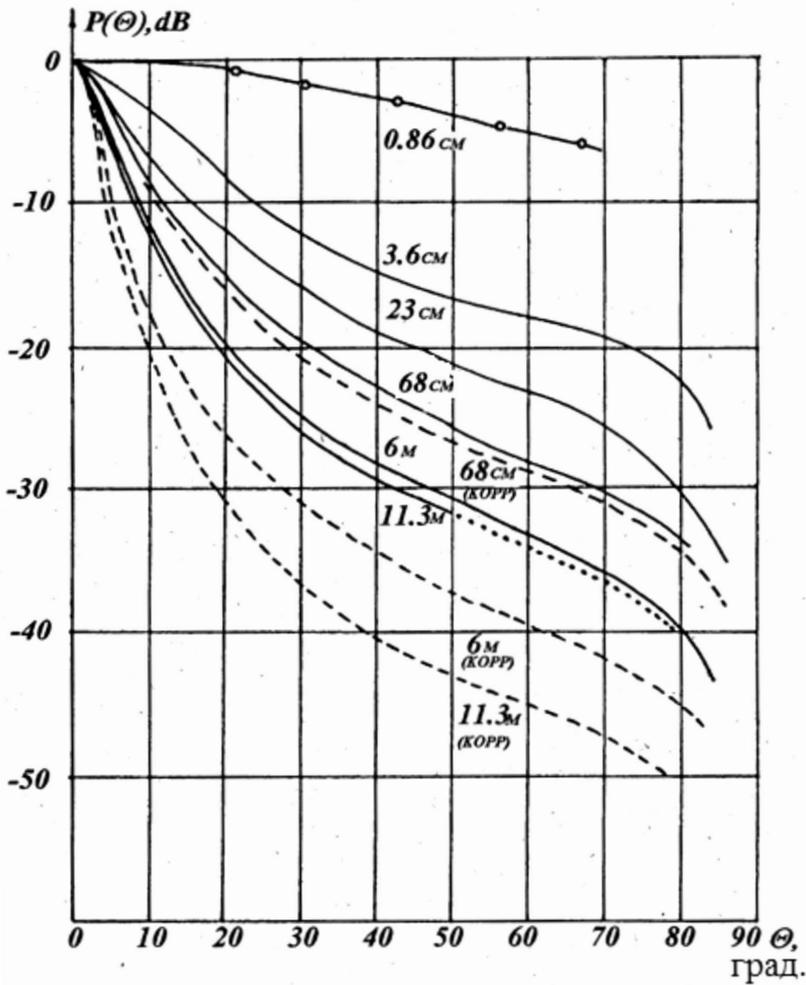


Рис. 1.6.2.

В приведенных на рис. 1.6.2 двух штриховых кривых учтена также небольшая поправка, связанная с тем, что накопление на приеме происходит в пределах некоторого временного интервала, не меньшего длительности импульса, в силу чего острый пик отклика, т.е. самое максимальное значение (точка  $a_0$  на рис. 1.6.1), не достигается. Усреднение приводит к его снижению на 1–3 дБ, и для определенности кривые для  $\lambda = 6$  м и 11,3 м опущены дополнительно на 2 дБ.

Если располагать более точными кривыми роста эхосигнала во времени, начиная с  $\tau = 0$ , и более полными техническими характеристиками приемников, а также формой излученных импульсов, можно добиться более точной коррекции семейства кривых. Но, по-видимому, дополнительное уточнение приведет к поправкам, не превышающим 1 дБ.

Из полученного семейства кривых следует, что действительный уровень сигнала в основном секторе диффузной части двух последних кривых значительно

ниже, чем в исходных кривых. Это может оказаться важным для многих приложений, так как с учетом сделанных уточнений реальная частотная зависимость уровня диффузной составляющей в области больших длин волн существенно отличается от первоначальной, непосредственно полученной в экспериментах.

## Литература

1. *Evans J.V., Pettengill G.H.* The scattering behavior of the Moon at wavelengths of 3.6, 68 and 784 centimeters // *J. Geoph. Res.* 1963. P. 423.
2. *Beckmann P., Klemperer W.K.* Interpretation of the angular dependence of backscattering from the Moon and Venus // *Rad. Science.* 1965. No 12. P. 1669.
3. *Klemperer W.K.* Angular scattering law for the Moon at 6-meter wavelength // *J. Geoph. Res.* 1965. No 15. P. 3798.
4. *Evans J.V., Hagfors T.* Study of radio echoes from the Moon. at 23 centimeters wavelengths // *J. Geoph. Res.* 1966. P. 4871.
5. *Hagfors T.* Backscattering from an undulating surface with applications to radar returns from the Moon // *J. Geoph. Res.* 1964. P. 3779.
6. *Davis J.R., Rohlf D.C.* Lunar radio-reflection properties at decameter wavelengths // *J. Geoph. Res.*, 1964. No 15. P. 3257.

### 1.7. Статистические характеристики освещенных участков случайной поверхности<sup>1</sup>

В ряде задач, связанных с рассеянием волн от случайной поверхности, требуется учет затенений ее отдельных элементов, возникающих при наклонном облучении.

Этот вопрос исследовался во многих работах, и достаточно полное их обобщение приведено в [1]. Однако в известных результатах выражения для мощности рассеяния в приближении геометрической оптики получены с рядом существенных упрощений, что, в частности, привело к упразднению из них частотной зависимости. Для ее сохранения требуется более полный анализ рассеяния с использованием, кроме традиционных исходных распределений высот и наклонов поверхности [1–3], также и автокорреляционной функции видимой части поверхности, образованной совокупностью освещенных участков. Если при наличии затенений рассматривать только освещенные участки, то статистические характеристики, соответствующие этой части поверхности, по сравнению с исходными, деформируются, симметричные распределения становятся несимметричными, а автокорреляционная функция заостряется, так как поверхность прерывает разрывы освещенности.

Известные работы по рассеянию оканчивались неразрешимыми противоречиями из-за использования фиксированных (заданных) статистических характеристик, относящихся к рассматриваемой физической поверхности. Несмотря на блестящие математические находки в статьях последних двух десятилетий,

<sup>1</sup> Изв. вузов. Радиофизика. 2000. № 5. С. 413–425.

неприятие экспоненциальной функции корреляции не позволило существенно продвинуть теоретические изыскания к сближению расчетных результатов с экспериментальными. Одним из возможных путей сближения теоретических результатов с реально наблюдаемыми — это уточнение характеристик поверхности, ответственных за формирование поля рассеяния.

Ниже приводится один из возможных вариантов получения поправки к первоначальным распределениям высот поверхности и функциям автокорреляции с приемлемой для практики точностью. Получены и оценены также другие статистические параметры, характеризующие освещенную часть поверхности (в рассматриваемой модели неосвещенная часть поверхности участия в создании поля рассеяния практически не принимает). Анализ относится к стационарной поверхности, обладающей средней плоскостью, конечной дисперсией и функцией автокорреляции.

Рассмотрим вначале распределение размеров затененных участков. Исходную поверхность примем нормальной, с нормальным распределением наклонов. Начальную часть анализа сформулируем так, как она изложена в [4]. Воспользуемся полученным в [4] выражением для вероятности  $S(\xi_0, p_0, q_0, \alpha, \tau)$  того, что точка поверхности на высоте  $\xi_0$  от средней плоскости с производными  $p_0$  и  $q_0$  по направлениям  $x$  и  $y$ , облучаемая под углом  $\alpha$  к средней плоскости, не будет затенена другим элементом поверхности на интервале  $\tau$  по оси  $y$  в сторону источника, т. е. участок, свободный от затеняющего препятствия, будет не меньше  $\tau$  (рис. 1.7.1):

$$S(\tau, \xi_0) = S(0) \exp \left\{ - \int_0^\tau g(\tau) d\tau \right\}, \quad (1.7.1)$$

$$\text{где } g(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{\Lambda(\mu) \exp [ -(\xi_0 + \mu\tau)^2 / 2\sigma^2 ]}{2 - \operatorname{erfc} [ (\xi_0 + \mu\tau) / \sqrt{2}\sigma ]}, \quad (1.7.2)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sigma_\alpha}{\mu} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_\alpha^2}} - \operatorname{erfc} \left( \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma_\alpha} \right) \right], \quad (1.7.3)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Здесь  $S(0)$  равно единице, если  $q_0 < \operatorname{tg} \alpha$ , и нулю, если это не так, что означает  $S(0) = i(\mu - q_0)$ ;  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $i(x)$  — функция единичного скачка,  $\sigma$  и  $\sigma_\alpha$  — стандартные отклонения высоты и наклона поверхности.

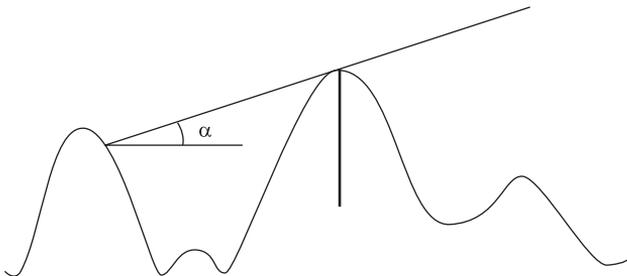


Рис. 1.7.1.

Величина  $S(\tau, \xi_0)$  как функция  $\tau$  изменяется в пределах  $0, \dots, 1$ , поэтому, дифференцируя  $S(\tau, \xi_0)$  по  $\tau$ , можем получить плотность распределения  $\tau$  для заданного уровня  $\xi_0$ . Усредняя затем полученное распределение по  $\tau, \xi_0, p_0, q_0$ , получим среднее значение  $\tau_{cp}$ , необходимое, как будет видно ниже, для уточнения автокорреляционной функции поверхности с разрывами освещенности. Отметим, что усреднение по  $p_0$  дает множитель, равный единице, а усреднение по  $q_0$  дает множитель

$$G(\mu) = 1 - 0,5 \operatorname{erfc}(\mu/\sqrt{2}\sigma_\alpha) = F(\mu/\sigma_\alpha).$$

где  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

После интегрирования в (1.7.1) с учетом (1.7.2), (1.7.3) получим:

$$S(\tau, \xi_0) = G(\mu) \left[ \frac{F\left(\frac{\xi_0}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{\xi_0 + \mu\tau}{\sigma}\right)} \right]^\Lambda, \tag{1.7.4}$$

Если проинтегрировать (1.7.4) по  $\xi_0$  и  $\tau$ , то получим, как и в [4], вероятность облучения элементов поверхности  $S$ :

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma_\alpha}\right)}{\Lambda + 1} = \frac{F\left(\frac{\mu}{\sigma_\alpha}\right)}{\Lambda + 1}. \tag{1.7.5}$$

Отметим, что, как и следует из физических соображений,  $S$  не зависит от  $\sigma$  и при уменьшении угла  $\alpha$  стремится к нулю.

Для дальнейших расчетов необходимо вычислить распределение вероятностей длин затененных участков  $W(\tau, \xi_0)$ , опирающихся на точки поверхности с высотой  $\xi_0$ . Предварительно из (1.7.4) получим вероятность незатенения этих лучей на длине  $\tau$ :

$$S_1(\tau, \xi_0) = \frac{S(\tau, \xi_0)}{G(\mu)}.$$

Но как видно из этого выражения, вероятность  $S_1(\tau, \xi_0)$  даже при  $\tau \rightarrow \infty$  не достигает единицы и в таком виде не может рассматриваться как распределение вероятностей. Остающаяся до единицы доля вероятности приходится на множество тех лучей, которые не испытывают затенений, т.е. для которых  $\tau = 0$ . Чтобы получить интегральное распределение вероятностей длин затененных интервалов для лучей, опирающихся на несамозатеняющие точки,  $W(\tau, \xi_0)$ , выражение  $S_1(\tau, \xi_0)$  должно быть дополнено этой недостающей частью, после чего может быть записано:

$$W(\tau, \xi_0) = 1 - \{S_1(\tau, \xi_0) + [1 - S_1(\infty, \xi_0)]i(\tau)\}.$$

$W(\tau, \xi_0)$  есть вероятность того, что затенение произойдет на интервале равном или меньшем  $\tau$ . Последнее слагаемое в соответствии с выражением для  $G(\mu)$  определяет вероятность для луча, дошедшего до точки  $\xi_0$ , совсем не быть затененным. Соответствующая  $W(\tau, \xi_0)$  плотность распределения имеет вид:

$$w(\tau, \xi_0) = \frac{dW(\tau, \xi_0)}{d\tau} = \frac{\Lambda F^\Lambda \left( \frac{\xi_0}{\sigma} \right)}{F^{\Lambda+1} \left( \frac{\xi_0 + \mu\tau}{\sigma} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\mu}{\sigma} e^{-\frac{(\xi_0 + \mu\tau)^2}{2\sigma^2}} + [1 - S_1(\infty, \xi_0)] \delta(\tau),$$

откуда при усреднении по всем  $\xi_0$  можем получить среднюю протяженность затененного участка:

$$\tau_{\text{ср}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_0^2}{2\sigma^2}} \times \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\Lambda F^\Lambda \left( \frac{\xi_0}{\sigma} \right)}{F^{\Lambda+1} \left( \frac{\xi_0 + \mu\tau}{\sigma} \right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu}{\sigma} e^{-\frac{(\xi_0 + \mu\tau)^2}{2\sigma^2}} + [1 - S_1(\infty, \xi_0)] \delta(\tau) \right\} \tau d\tau.$$

Сделаем замену переменных:  $\xi_0/\sigma = x$ ,  $\mu\tau/\sigma = y$ ,  $\mu d\tau/\sigma = dy$ . Тогда  $\tau_{\text{ср}}$  принимает вид:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\Lambda\sigma}{\pi\mu} \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-x^2} [\operatorname{erfc}(-x/\sqrt{2})]^\Lambda \int_0^{\infty} [\operatorname{erfc}\{-(x+y)/\sqrt{2}\}]^{-(\Lambda+1)} e^{-xy-y^2/2} y dy.$$

Из полученного выражения видно, что двойной интеграл представляет собой функцию одной переменной  $\Lambda$ . Его расчет приводит к аппроксимирующей формуле, отличающейся от точного решения в диапазоне  $\Lambda$  от 0 до 11 не более чем на десятые доли процента. С учетом аппроксимации получим:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\sigma}{\pi\mu} \Lambda \exp[-17,8849 + 16,3421(1+2\Lambda)^{-0,5} - 95,6614(1+2\Lambda)^{-1/3} + 98,2524(1+2\Lambda)^{-0,25}]. \quad (1.7.6)$$

Зависимость  $\Lambda$  от угла облучения  $\alpha$  для значений  $\sigma_\alpha = 0,1; 0,2$  и  $0,3$  показаны на рис. 1.7.2. Кривая с меньшими значениями  $\Lambda$  относится к большему значению  $\sigma_\alpha$ . При  $\sigma_\alpha = 0,2$  углу  $\alpha = 1^\circ$  соответствует  $\Lambda = 4,09$ . На горизонтальной оси — угол облучения  $\alpha$  град. На вертикальной оси отложена величина  $\Lambda$ . Все, что после дроби в (1.7.6), обозначим  $U(\Lambda)$ . Получим:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\sigma}{\pi\mu} U(\Lambda). \quad (1.7.7)$$

Функция  $U(\Lambda)$  имеет вид, показанный на рис. 1.7.3.

Проанализировать поведение  $\tau_{\text{ср}}$  в зависимости от угла  $\alpha$  можно на примере обычной поверхности со средними параметрами,  $\sigma_\alpha = 0,2$ . Стандартное отклонение высот  $\sigma$  перенесем в левую сторону (1.7.7) к  $\tau_{\text{ср}}$  и положим его равным единице. Рассчитанная для этого случая по (1.7.7) зависимость  $\tau_{\text{ср}}/\sigma$  от угла  $\alpha$  в интервале от  $0,2$  до  $10^\circ$  показана на рис. 1.7.4.

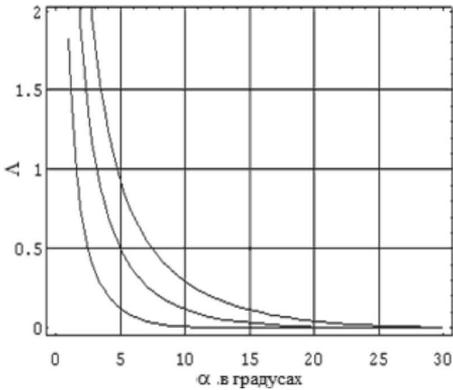


Рис. 1.7.2.

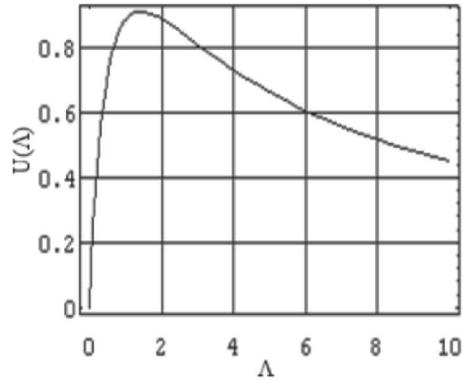


Рис. 1.7.3.

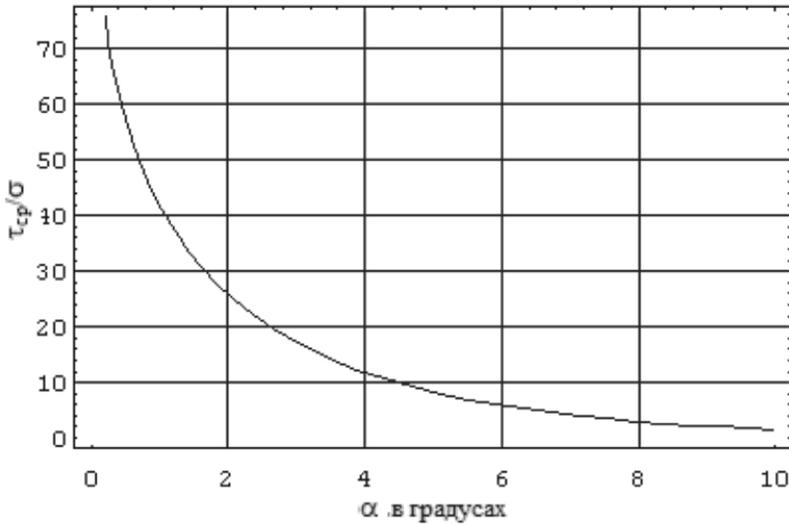


Рис. 1.7.4.

Из рисунка видно, что протяженность затененных участков резко возрастает с уменьшением угла облучения, превосходя в десятки раз величину проекции среднего наклонного элемента поверхности, приблизительно оцениваемую как  $1,4\sigma/\sigma_\alpha$ .

Определим теперь среднюю высоту и дисперсию видимой части поверхности. Индекс 0 у  $\xi_0$  далее будем опускать. Вычислим интегральное распределение вероятностей высот освещенных точек. Оно выражается двумя сомножителями. Первый — это исходное распределение  $F(\xi/\sigma)$  при отсутствии затенений. Второй представляет вероятность  $Q(\xi, \mu) = S(\tau \rightarrow \infty, \xi)/G(\mu)$  незатенения точки на высоте  $\xi$  помимо тех, которые уже учтены множителем  $G(\mu)$ , отражающим начальное уменьшение доли освещенных точек только за счет самозатенений. Величина  $Q(\xi, \mu)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  стремится к единице, при  $\xi \rightarrow -\infty$  стремится к нулю. Теперь новые интегральное распределение  $P_c(\xi)$  и плотность распределения

$w_c(\xi)$  высот освещенных точек поверхности с учетом (1.7.4) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} P_c(\xi) &= F(\xi/\sigma)Q(\xi, \mu) = [F(\xi/\sigma)]^{\Lambda+1}, \\ w_c(\xi) &= dP_c(\xi)/d(\xi) = (\Lambda + 1)[F(\xi/\sigma)]^\Lambda w(\xi), \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

где

$$w(\xi) = dF(\xi/\sigma)/d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}.$$

Среднее значение  $\langle \xi_c \rangle$  и дисперсия  $\sigma_c^2$  могут быть вычислены путем интегрирования выражений  $\xi w_c(\xi)$  и  $(\xi - \langle \xi_c \rangle)^2 w_c(\xi)$  в бесконечных пределах. Однако функциональная зависимость среднего значения и дисперсии видимой части поверхности от параметров исходной поверхности или условий задачи может быть получена только приближенно. Сделаем замену  $x = \xi/\sigma$  и запишем среднее значение в виде

$$\langle \xi_c \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi w_c(\xi) d\xi = \frac{(\Lambda + 1)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^\Lambda e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.7.9)$$

Интеграл в этой формуле, так же как и выше в  $\tau_{ср}$ , является функцией одной переменной  $\Lambda$ . Он может быть оценен численно, и в широком диапазоне  $\Lambda$ , от  $\Lambda = 0$  (освещение сверху) до  $\Lambda = 10$  (угол  $\alpha \ll 1^\circ$ ) результаты численных расчетов могут быть аппроксимированы формулой, коэффициенты в которой подобраны по методу наименьших квадратов:

$$\langle \xi_c \rangle = -3,35 + 5,735(\Lambda + 1)^{1/3} - 2,36(\Lambda + 1)^{1/2}. \quad (1.7.10)$$

Соответствие этой формулы вычисленным точным значениям (точки) показано на рис. 1.7.5.

Расчеты по формуле (1.7.10) с учетом значения  $\Lambda$  как функции угла подъема  $\alpha$  для значения  $\sigma_\alpha = 0,2$  приведены на рис. 1.7.6.

Численные расчеты по выражению (1.7.9) не позволяют проследить ход  $\langle \xi_c \rangle$  в зависимости от  $\alpha$  при приближении к скользящему падению ( $\alpha \rightarrow 0$ ). Сделаем предельные оценки.

Скользящее падение характеризуется большими величинами  $\Lambda$ , при которых выражение  $[F(x)]^\Lambda$  приближается к виду ступенчатой функции  $i(x)$ . При этом интегрирование в (1.7.9) можно приближенно проводить в пределах от  $x_0$  до  $\infty$ , где значение  $x_0$  будем искать как решение трансцендентного уравнения  $[F(x_0)]^\Lambda \approx \approx 0,2-0,5$ . Выбор численного значения здесь несколько произволен. Интеграл в (1.7.9) теперь примет вид:

$$z = \int_{x_0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{x_0^2}{2}}. \quad (1.7.11)$$

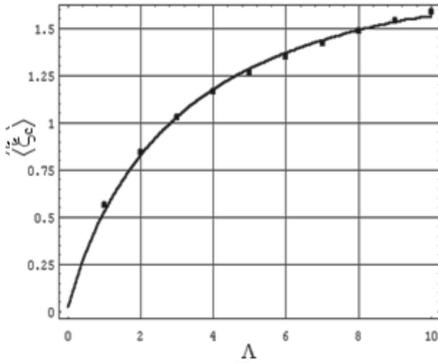


Рис. 1.7.5.

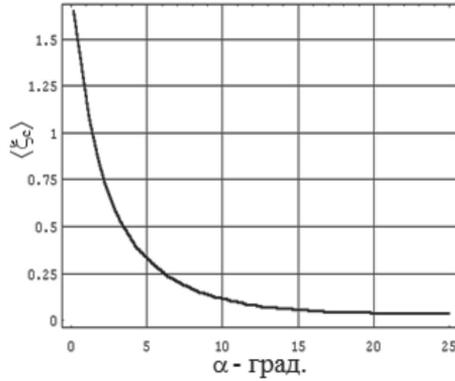


Рис. 1.7.6.

Для оценки  $x_0$  отметим, что при больших  $\Lambda$  значение  $x_0$  также будет большим, так что можно воспользоваться асимптотическим выражением:  $F(x_0) \approx 0,5 + 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x_0^2/2} \frac{1}{x_0} \right)$ . Приравняв это выражение для конкретности  $0,5^{1/\Lambda}$ , после двух итераций получим  $x_0$  в виде

$$x_0 = \sqrt{-2 \ln z}, \tag{1.7.12}$$

где

$$z = \sqrt{2\pi} \left( 1 - 0,5^{\frac{1}{\Lambda}} \right) \sqrt{-2 \ln \left[ \sqrt{2\pi} \left( 1 - 0,5^{\frac{1}{\Lambda}} \right) \sqrt{-2 \ln \left[ \sqrt{2\pi} \left( 1 - 0,5^{\frac{1}{\Lambda}} \right) \right]} \right]}.$$

Записывая затем  $0,5^{1/\Lambda} = (1 - 0,5)^{1/\Lambda}$  в виде ряда

$$1 - \frac{0,5}{\Lambda} + \frac{\left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right)}{\Lambda 2!} 0,5^2 - \frac{\left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) \left(\frac{1}{\Lambda} - 2\right)}{\Lambda 3!} 0,5^3 + \dots,$$

можно видеть, что при  $\Lambda \rightarrow \infty$  он стремится к  $1 + (\ln 0,5)/\Lambda$ . Подставляя это выражение в формулу (1.7.12) вместо  $0,5^{1/\Lambda}$ , получим:

$$z = \sqrt{2\pi} (0,693/\Lambda) \sqrt{-2 \ln \left[ (2\pi)^{0,5} (0,693/\Lambda) \sqrt{-2 \ln \left[ (2\pi)^{0,5} (0,693/\Lambda) \right]} \right]}. \tag{1.7.13}$$

После замены выражением (1.7.13) интеграла в (1.7.9) и при стремлении  $\Lambda$  к  $\infty$ , среднее значение  $\langle \xi_c \rangle$  принимает вид:

$$\langle \xi_c \rangle \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} = \left[ \frac{\Lambda + 1}{\sqrt{2\pi}} \right] \cdot z \approx 0,693 \cdot \sqrt{2 \ln \frac{\Lambda}{0,693 \sqrt{2\pi}} \sqrt{2 \ln \frac{\Lambda}{0,693 \sqrt{2\pi}}}}. \tag{1.7.14}$$

Из (1.7.14) видно, что асимптотически среднее значение освещенной части поверхности при увеличении  $\Lambda$  стремится к бесконечности, но весьма медленно, приблизительно как корень из логарифма  $\Lambda$ . Последняя, при большой ее величине, согласно (1.7.3) обратно пропорциональна углу падения  $\alpha$ . Но при допущенных упрощениях с заменой интеграла в (1.7.9) на (1.7.11) и некоторого произвола в выборе граничного числа для оценки  $x_0$  абсолютная точность полученного выражения невелика (например, при  $\Lambda = 10$  по (1.7.14) получим 1,04 вместо точного решения 1,58). Если для вычисления  $x_0$  в (1.7.11) приравнять  $[F(x_0)]^\Lambda$  величине не 0,5, а, например, 0,3, то достигнем почти полного согласия решений (1,48 вместо 1,58).

Аналогично вычисляется и дисперсия видимой части поверхности  $\sigma_c^2 = M_c^2 - \langle \xi_c \rangle^2$ . Второй начальный момент  $M_c^2$  имеет вид:

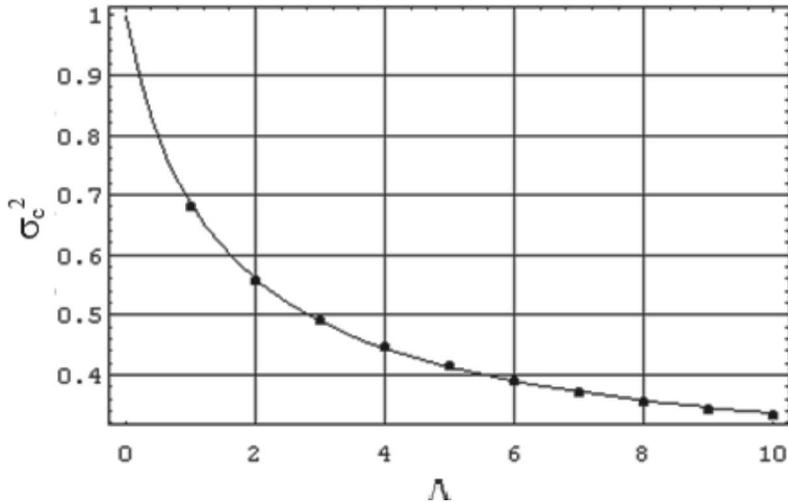
$$M_c^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 w_c(\xi) d\xi = \frac{(\Lambda + 1)\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [F(x)]^\Lambda e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.7.15)$$

Выражение  $\sigma_c^2 = M_c^2 - \langle \xi_c \rangle^2$  после численного интегрирования (без  $\sigma^2$ ) может быть для  $\Lambda$  от 0 до 10 заменено формулой:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 [0,3486 + 2,058(\Lambda + 1)^{-1/2} - 1,408(\Lambda + 1)^{-1/3}]. \quad (1.7.16)$$

Сопоставление расчетов по этой формуле и численных расчетов для 10 точек по (1.7.9) и (1.7.15) приведено на рис. 1.7.7.

Рис. 1.7.7.



Асимптотика для дисперсии была прослежена путем численных расчетов  $\Lambda$  от 10 до 300, что соответствует для выбранной поверхности ( $\sigma_\alpha = 0,2$ ) углам  $\alpha$  приблизительно от  $0,5^\circ$  до  $0,015^\circ$ . В этом интервале уменьшение дисперсии происходит медленнее, чем  $\lg(1/\Lambda)$ , и достаточно хорошо следует зависимости

$$\sigma_c^2 \Big|_{\Lambda > 10} \sim \sigma^2 [0,373 - 0,064(\lg \Lambda)^{2/3}].$$

Распределение наклонов (производной)  $q$  для видимой части поверхности также существенно изменяется. При вертикальном облучении сохраняется нормальное распределение  $F(q/\sigma_\alpha)$ . При облучении под углом  $\alpha$  доля всех несамозатененных точек, производные в которых ограничены сверху величиной  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , будет  $F(\mu/\sigma_\alpha)$ , но для видимых точек она меньше пропорционально отношению  $S(\mu)/F(\mu/\sigma_\alpha)$ , поэтому распределение, учитывая, что оно должно быть нормировано к единице, принимает вид обычного усеченного нормального закона:

$$P(q/\sigma_\alpha) = F(q/\sigma_\alpha)/F(\mu/\sigma_\alpha),$$

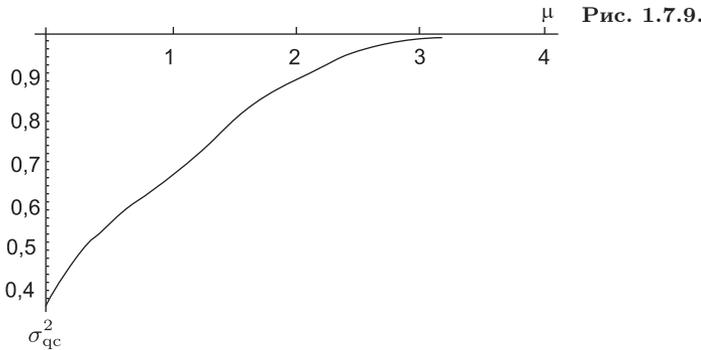
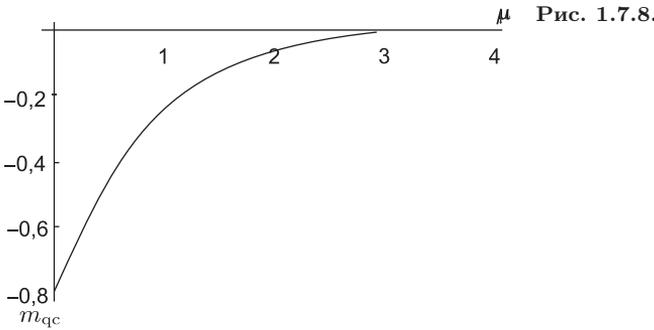
где  $q \leq \mu$ . Плотность распределения для  $q$  получим в виде:

$$w(q) = \frac{dP(q/\sigma_\alpha)}{dq} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha} \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{2\sigma_\alpha^2}}}{F(\mu/\sigma_\alpha)},$$

где  $q \leq \mu$ . Среднее значение  $m_{qc} = \langle q_c/\sigma_\alpha \rangle$  и дисперсия  $\sigma_{qc}^2 = \sigma_{\alpha_c}^2/\sigma_\alpha^2$  наклонов видимой части в долях  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\alpha^2$  соответственно, найденные по обычным правилам, равны ( $\langle q_c \rangle$  и  $\sigma_{\alpha_c}^2$  — ненормированные среднее значение и дисперсия):

$$m_{qc} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)}{F(\mu/\sigma_\alpha)}, \quad \sigma_{qc}^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)}{F(\mu/\sigma_\alpha)} - \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)}{2\pi[F(\mu/\sigma_\alpha)]^2}.$$

Эти функции приведены на рис. 1.7.8 и 1.7.9. Несколько иной подход к выводу плотности распределения наклонов применен в [5].



Рассмотрим изменения в автокорреляционной функции поверхности, вызванные появлением разрывов в освещенной части. Участки лучей, касательных в одной точке к поверхности и расположенных над ее затененными частями, не переизлучают (граница света и тени), они как бы не существуют.

Так как затененные области на поверхности расположены случайно, то произвольный случайный профиль поверхности оказывается промодулированным импульсной функцией, также случайной, с амплитудой, равной единице там, где

поверхность освещена, и сколь угодно большой по модулю отрицательной величиной там, где имеется затенение. Это означает, что в местах затенений вместо поверхности вводится глубокий провал  $A_{\text{пр}} \gg \sigma$ . В результате профиль поверхности  $h(y)$  с затенениями представляется произведением двух функций:  $f(y)$  — профиля поверхности без затенений и  $H(y)$  — импульсной случайной функции:

$$h(y) = f(y)H(y).$$

Автокорреляционная функция  $B_c(t)$  частично освещенного профиля находится по общим правилам с учетом того, что функции  $f(y)$  и  $H(y)$  в силу случайного положения освещенных и затененных участков можно считать практически независимыми. Поэтому можем написать:

$$B_c(t) = \overline{f(y)H(y)f(y+t)H(y+t)} = \overline{f(y)f(y+t)} \cdot \overline{H(y)H(y+t)} = B(t) \cdot N(t), \quad (1.7.17)$$

где  $B(t)$  и  $N(t)$  — автокорреляционные функции поверхности и прерывающей ее импульсной последовательности, соответственно.

Эта модель достаточно точно отражает коэффициент автокорреляции, так, как с точки зрения наблюдателя, для корреляционных свойств видимой части поверхности безразлично, чем вызвано отсутствие отраженного сигнала от затененной части поверхности — свойствами самой поверхности при ее наличии, или ее провалом в соответствии с импульсной функцией  $H(y)$ , т. е. физическим отсутствием поверхности в данном месте. Но для оценки дисперсии видимой части поверхности эта модель не пригодна, так как по ней дисперсия формируется в том числе и провалами поверхности, которые для наблюдателя отсутствуют, находясь под его линией зрения. Дисперсия видимой части поверхности оценена выше и дается формулой (1.7.16), поэтому воспользуемся моделью (1.7.17) только для оценки коэффициента автокорреляции. Так как  $B(t)$  — функция заданная, то вычислению подлежит только сомножитель  $N(t)$ .

Примем, что на случайной поверхности распределение протяженностей теневых интервалов, так же как и освещенных, практически близко к экспоненциальному. Среднее значение длины затененных интервалов равно  $\tau_{\text{ср}}$ , а для освещенных может быть найдено, учитывая, что среднее число теневых, равно как и освещенных, участков равно  $\lambda = (1 - S)/\tau_{\text{ср}}$ . Отсюда средняя длина освещенных участков составит

$$\tau_{\text{ср}}^* = S/\lambda. \quad (1.7.18)$$

Автокорреляционная функция случайной импульсной последовательности  $H(t)$  со свойствами, определенными выше, в общем виде получена в [6, п. 6.3]. Конкретно для нашего случая и в наших обозначениях эта функция имеет вид:

$$\begin{aligned} N(t) &= A_{\text{пр}}^2 \tau_{\text{ср}}^* \tau_{\text{ср}} (\tau_{\text{ср}} + \tau_{\text{ср}}^*)^{-2} \exp[-|t|(\tau_{\text{ср}} + \tau_{\text{ср}}^*)/\tau_{\text{ср}}^* \tau_{\text{ср}}] = \\ &= A_{\text{пр}}^2 S(1 - S) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{ср}})] + S^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция  $B(t)$  представляет собой  $\sigma^2 R(t)$ , то, поделив  $B(t)N(t)$  на  $B(0)N(0)$ , получим коэффициент автокорреляции освещенной части поверхности  $R_c(t)$  в виде

$$R_c(t) = R(t) \cdot \{(1 - S) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{ср}})] + S\} = R(t) \cdot \nu(t), \quad (1.7.19)$$

$$\text{где } \nu(t) = (1 - S) \exp[-|t|/(S\tau_{\text{ср}})] + S, \quad (1.7.20)$$

а функцию автокорреляции с учетом новой величины дисперсии получим как

$$B_c(t) = \sigma_c^2 R(t) \nu(t), \quad (1.7.21)$$

где дисперсия рассчитывается по (1.7.16).

С другой стороны, учитывая (1.7.20),  $B_c(t)$  представима как сумма

$$B_c(t) = \sigma_c^2 S R(t) + \sigma_c^2 (1 - S) R(t) \exp[-|t|/(S\tau_{cp})],$$

в которой первое слагаемое, пропорциональное  $S$ , целиком сохраняет исходную функцию  $R(t)$ , второе — «теневое» — независимо ни от чего привносит экспоненциальные свойства. Такая функция автокорреляции, состоящая из двух существенно различных частей, физически объяснимых и позволяющих получить количественные оценки, в значительной мере оправдывает интуитивную идею о применении двухмасштабной модели поверхности [7].

Рассмотрим влияние множителя  $\nu(t)$  на конкретном примере. Во многих случаях автокорреляционную функцию исходной поверхности  $B(t)$  принято описывать, в частности, гауссовой кривой, имеющей нулевую производную при  $t = 0$ :

$$B(t) = \sigma^2 R(t) = \sigma^2 \exp(-t^2/m^2), \quad (1.7.22)$$

для которой  $\sigma_\alpha = \sqrt{2}\sigma/m$ , где  $m$  — характерный горизонтальный размер неровностей,  $R(t)$  — коэффициент автокорреляции. Для частично освещенной поверхности  $R_c(t)$  при заданных параметрах  $\sigma$ ,  $m$  и  $\alpha$  зависит только от двух безразмерных параметров:

$$\beta = \mu/\sigma_\alpha = \mu m/\sigma\sqrt{2}, \quad t' = t/m,$$

что следует из структуры входящих в  $R_c(t)$  составляющих  $S$  и  $\tau_{cp}$ . В соответствии с (1.7.20) и (1.7.22) можем записать:

$$R_c(t') = R(t')\nu(t') = \exp(-t'^2)\{S(\beta) + [1 - S(\beta)]e^{-|t'|/S(\beta)\tau'_{cp}}\}, \quad (1.7.23)$$

где  $\tau'_{cp} = \tau_{cp}/m = \tau_{cp}\sigma_\alpha/\sigma\sqrt{2}$ .

На рис. 1.7.10 построены зависимости  $R(t')$  (верхняя кривая) и  $R_c(t')$  по (1.7.23) для нескольких значений  $\beta$ , соответствующих углам возвышения  $\alpha$ , равным 1, 2, 5, 10 и 15° (нижняя кривая для  $\alpha = 1^\circ$ ).

В расчетах использована функция автокорреляции  $B(t)$  для умеренно холмистой земной поверхности со значением  $m/\sigma = 7$ ,  $\sigma_\alpha = 0,2$ .

Из рисунка видно, что наличие экспоненциального множителя в  $\nu(t)$  приводит к тому, что любая автокорреляционная функция, даже такая гладкая, как гауссова, для видимой части поверхности при наклонном облучении становится в начальной части острой с производной, в нулевой точке не равной нулю.

Отметим некоторые подробности. Величина производной в нуле для коэффициента автокорреляции (1.7.21) как функция угла  $\alpha$  имеет немонотонный ход:

$$\left. \frac{dB_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\nu(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\sigma_c^2(\alpha)[1 - S(\alpha)]}{S(\alpha)\tau_{cp}(\alpha)}.$$

При увеличении и уменьшении угла  $\alpha$  производная увеличивается по сравнению с некоторым наименьшим значением. Это связано с тем, что в обоих случаях либо освещенные, либо затененные промежутки становятся короткими, вероятность их резко падает и существенное снижение корреляции происходит уже на малом интервале  $t$ , что и приводит в этих случаях к более крутому наклону кривых  $B_c(t)$

или  $\nu(t)$  при  $t$ , близком к нулю. Это можно видеть из рис. 1.7.11, где показана начальная часть кривых  $\nu(t)$  для  $\alpha = 0,3; 1; 2; 5; 10$  и  $15^\circ$ . Нижняя кривая относится к  $\alpha = 0,3^\circ$ , верхняя — к  $15^\circ$ . Кривые построены для аргумента  $t' = t/m$ .

Вместе с тем из рис. 1.7.10, 1.7.11 видно, что при повышении угла облучения, т. е. при уменьшении вероятности затенения, коэффициент  $\nu(t')$ , хотя и сохраняет производную в нуле конечной, постепенно утрачивает свое значение, приближаясь для всех  $t'$  к единице, и функция  $R_c(t')$  переходит в  $R(t')$  (в верхнюю кривую на рис. 1.7.10).

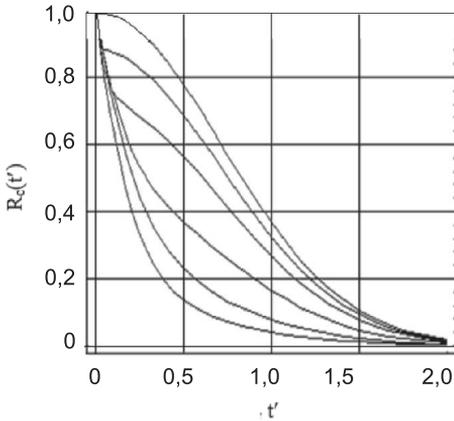


Рис. 1.7.10.

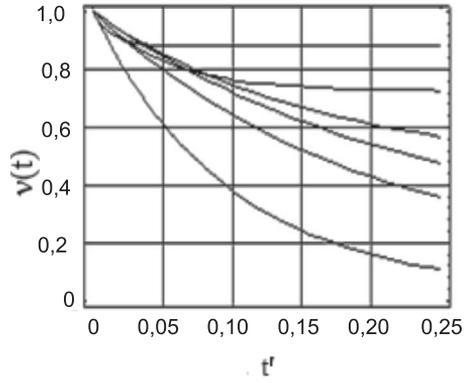
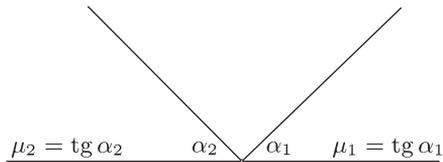


Рис. 1.7.11.

Рассмотрим случай, когда пункты излучения и наблюдения находятся по разные стороны вертикальной плоскости, проходящей через область рассеяния. Введем два угла подъема:  $\alpha_1$  (на пункт передачи) и  $\alpha_2$  (на пункт приема), соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (рис. 1.7.12). При этом формула вероятности одновременной видимости элементов поверхности с двух пунктов будет представлять собой произведение вероятностей незатенения элемента поверхности с каждой из сторон.

Рис. 1.7.12.



Поэтому в соответствии с (1.7.1) вместо  $S(\tau)$  будет  $S(\tau_1)S(\tau_2)$ , а  $g(\tau)$ , соответственно, заменится на сумму  $g(\tau_1) + g(\tau_2)$ . Вместо (1.7.4) теперь будет

$$S(\tau_1, \tau_2, \xi_0) = G(\mu_1)G(\mu_2) \left[ \frac{F\left(\frac{\xi_0}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{\xi_0 + \mu_1 \tau_1}{\sigma}\right)} \right]^{\Lambda_1} \left[ \frac{F\left(\frac{\xi_0}{\sigma}\right)}{F\left(\frac{\xi_0 + \mu_2 \tau_2}{\sigma}\right)} \right]^{\Lambda_2}. \quad (1.7.24)$$

Следуя процедуре вывода выражения (1.7.8) и следующих за ним, вместо  $\Lambda$  получим  $\Lambda_d = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , где  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  рассчитываются по (1.7.3), но с заменой  $\mu$  на  $\mu_1(\alpha_1)$  и  $\mu_2(\alpha_2)$ , соответственно. Средняя высота и дисперсия освещенной части

поверхности  $\langle \xi_d \rangle$  и  $\sigma_d^2$  рассчитываются по формулам (1.7.9), (1.7.10), (1.7.15) и (1.7.16) с заменой  $\Lambda$  на  $\Lambda_d$ . Расчетные формулы для них имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle \xi_d \rangle &= -3,35 + 5,735(\Lambda_d + 1)^{1/3} - 2,36(\Lambda_d + 1)^{1/2}, \\ \sigma_d^2 &= \sigma^2[0,3486 + 2,058(\Lambda_d + 1)^{-1/2} - 1,408(\Lambda_d + 1)^{-1/3}], \end{aligned}$$

где  $\Lambda_d = \Lambda_1 + \Lambda_2$ .

Выражение для  $S_d$  с учетом (1.7.24) после таких же, как и ранее, вычислений приобретает вид:

$$S_d = \frac{F(\mu_1/\sigma_\alpha) \cdot F(\mu_2/\sigma_\alpha)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1}.$$

В частности, при вертикальном падении и наблюдении  $\mu_1 = \mu_2 = \infty$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$  и  $S_d = 1$ .

Вычисление  $\tau_{\text{дср}}$  (длины непрерывного участка, любая точка которого не видна хотя бы с одного конца трассы) приводит к сумме  $\tau_{1\text{ср}} + \tau_{2\text{ср}}$ , так как при интегрировании выражения для  $\tau_{\text{ср}}$  теперь уже под знак интеграла вместо  $\tau$  везде входит сумма  $\tau_1 + \tau_2$  (это следует из вычислений, начиная с (1.7.1); учитывается также, что точка встречи  $\xi_0$  является общей, и статистически  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  практически независимы).

С учетом новых параметров и обозначений можем записать:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2\text{ср}} &= \frac{\sigma}{\pi\mu_{1,2}} \Lambda_{1,2} \exp[-17,8849 + 16,3421(1 + 2\Lambda_{1,2})^{-0,5} - \\ &\quad - 95,6614(1 + 2\Lambda_{1,2})^{1/3} + 98,2524(1 + 2\Lambda_{1,2})^{-0,25}], \end{aligned}$$

$$\tau_{\text{дср}} = \tau_{1\text{ср}} + \tau_{2\text{ср}},$$

$$\nu_d(t) = (1 - S_d) \exp\left(-\frac{|t|}{S_d \tau_{\text{дср}}}\right) + S_d. \quad (1.7.25)$$

В этих условиях функция и коэффициент автокорреляции частично освещенной поверхности  $B_d(t)$  и  $R_d(t)$  равны:

$$B_d(t) = \sigma_d^2 R(t) \nu_d(t), \quad R_d(t) = R(t) \nu_d(t).$$

Аналогичным путем могут быть получены и характеристики наклонов одновременно видимой с двух сторон части поверхности. Вместо  $P(q/\sigma_\alpha)$  интегральное распределение нормированных наклонов  $P_d(q/\sigma_\alpha)$  и плотность распределения  $w_d(q)$  для  $q$  получим в виде:

$$\begin{aligned} P_d(q/\sigma_\alpha) &= F(q/\sigma_\alpha) / [F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)], \\ w_d(q) &= dP_d(q/\sigma_\alpha) / dq = \\ &= (1/\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha^2) \exp(-q^2/2\sigma_\alpha^2) / [F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)], \end{aligned}$$

где  $-\mu_2 \leq q \leq \mu_1$ .

Нормированные среднее значение  $m_d$  и дисперсию  $\sigma_d^2$  в долях  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\alpha^2$ , соответственно, получим по обычным правилам:

$$m_d = (1/\sqrt{2\pi})[\exp(-\mu_2^2/2\sigma_\alpha^2) - \exp(-\mu_1^2/2\sigma_\alpha^2)]/[F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)],$$

$$\sigma_d^2 = 1 - (1/[F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)]) \times$$

$$\times (1/\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha)[\mu_1 \exp(-\mu_1^2/2\sigma_\alpha^2) - \mu_2 \exp(-\mu_2^2/2\sigma_\alpha^2)] - (1/[F(\mu_1/\sigma_\alpha) - F(-\mu_2/\sigma_\alpha)]^2) \cdot (1/2\pi)[\exp(-\mu_1^2/2\sigma_\alpha^2) - \exp(-\mu_2^2/2\sigma_\alpha^2)]^2.$$

На рис. 1.7.13 показаны примеры расчетов  $R_d(t')$ , проведенных с использованием функции автокорреляции поверхности (1.7.22) для случая зеркального отражения ( $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ ). Углы подъема приняты равными 1, 2, 5, 10 и 15°. Верхняя кривая — функция  $R(t')$  по (1.7.22), нижняя кривая —  $R_d(t')$  для  $\alpha = 1^\circ$ . Аргумент — нормированное расстояние  $t' = t/m$ ; вместо  $\tau_{\text{дср}}$  используется нормированная величина  $\tau'_{\text{дср}} = \tau_{\text{дср}}/m$ ;  $\sigma_\alpha = 0,2$ . На рис. 1.7.14 приведены кривые  $R_d(t')$  при тех же параметрах, что и выше, для условий, когда угол подъема на излучатель равен 5°, а на пункт наблюдения составляет 1°, 2°, 5°, 10° и 15°.

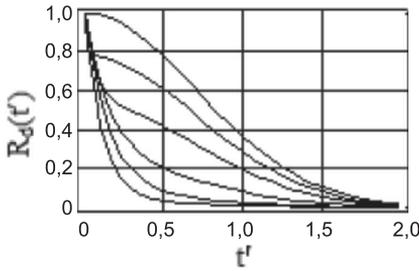


Рис. 1.7.13.

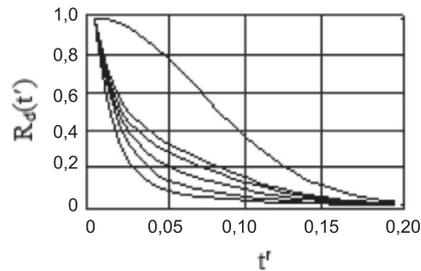


Рис. 1.7.14.

На рисунках хорошо видны изменения, которые происходят с коэффициентом автокорреляции поверхности при различных вариантах облучения и наблюдения, если учитывать возникающие затененные участки.

В заключение отметим следующее.

При рассеянии волн отраженное поле формируется видимой одновременно с двух сторон частью поверхности. Анализ показал, что при учете разрывов освещенности реально участвующая в отражении волн часть поверхности имеет отличные от исходных статистические характеристики. Повышается средняя высота и снижается дисперсия элементов видимой части поверхности, так как в первую очередь из участия в рассеянии уходят ее низко расположенные области. Коэффициент автокорреляции приобретает конечную производную в нулевой точке, что обусловлено наличием разрывов в облучении поверхности, и при возрастании доли затененной поверхности все более приближается к экспоненте. Важно отметить, что экспоненциальная начальная часть появляется всегда, когда возникают затенения, независимо от формы коэффициента корреляции реальной поверхности. Одновременно необходимо учитывать и модифицированное значение дисперсии, меняющееся с изменением геометрии задачи. При изучении рассеяния волн можно ожидать, что эти явления в значительной мере будут предопределять стирание различий между получаемыми результатами при использовании поверхностей с различными статистическими характеристиками.

## Литература

1. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978.
3. Яковлев О.И. Космическая радиофизика. М.: Научная книга, 1998.
4. Smith B.G. Lunar Surface Roughness: Shadowing and Thermal Emission // J. of the G.R. 1967. Vol. 72. No. 16. P. 4059.
5. Saunders P.M. Shadowing on the Ocean and the Existence of the Horizon // J. of the G.R. 1967. Vol. 72. No. 18. P. 4643.
6. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике / под ред. проф. В.И.Тихонова. М.: Советское радио, 1970.
7. Курьянов Б.Ф. Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя типами неровностей // Акустический журнал. 1962. Т. 8. № 3. С. 325–333.

### 1.8. Учет рассеяния от земной поверхности при расчете КВ-радиолиний<sup>1</sup>

#### 1.8.1. Введение

За последние десятилетия активность использования КВ-диапазона непрерывно возрастает. В системах связи развивается использование адаптивных систем, систем со все более сложными программами защиты информации от шумов и преднамеренных помех, в радиовещании продолжают использоваться опытные передачи с цифровой модуляцией, КВ-системы оповещения, предупреждения и помощи при бедствиях не имеют альтернативы. Многие службы испытывают недостаток в выделенных полосах частот. Все это многоплановое использование КВ-диапазона требует достаточно точных методов расчета радиолиний и зон обслуживания. В настоящее время МСЭ-R предлагает рекомендацию [1], в которой отражены наиболее важные и изученные факторы, влияющие на формирование величины напряженности поля в месте приема, но многодесятилетний опыт работы КВ-систем показывает, что точность расчетов еще весьма далека от желаемой.

Одним из факторов, заметно влияющих на точность расчетов, является коэффициент потерь при отражении от Земной поверхности. В типичных методиках потери при отражении от земли учитываются введением множителя 0,8 для каждого отражения от поверхности без различий для моря и суши. При этом явление рассеяния от неровной и неоднородной поверхности попросту игнорируется. Но на сухопутной трассе отражение от суши лишь в исключительных случаях можно приближенно считать зеркальным.

<sup>1</sup> В соавторстве с Яковцом В.А. Труды НИИР. 2015. № 4, С. 72–84.

Ниже рассматривается эффект рассеяния радиоволн при отражении от земной поверхности при расчетах трасс средней и большой протяженности. Анализируется рассеяние как в главном направлении излучения, так и в обратном и боковых. В ряде случаев учет рассеяния приводит к значительному отличию результатов расчета от получаемых при использовании стандартной методики. В качестве типичных ситуаций в работе анализируется двухскачковая трасса в двух случаях: отражение от морской поверхности в спокойных условиях и от земной поверхности с различными неровностями. В качестве первого шага при расчете рассеяния для простоты расчетов используется модель плоской земли с некоторой коррекцией, которая позволяет достаточно полно проявить основные закономерности изменения индикатрисы рассеяния и зон покрытия, не внося значительных ошибок в численные оценки.

### 1.8.2. Рассеяние от неровной поверхности

Работ по рассеянию от шероховатых поверхностей опубликовано большое количество. Наиболее прозрачно физическая сторона процесса описана в работе М.А. Исаковича [2], особенно в разделе, относящемся к акустическим волнам. Однако в части рассеяния волн в радиодиапазоне в этой работе допущены значительные математические погрешности, отмеченные в [3]. Поэтому воспользуемся решением задачи, изложенным в [4], где наряду с исправлением ошибок, допущенных в [2], проведено более детальное рассмотрение проблемы.

Земная поверхность, в основном статистически нестационарная, не может быть описана простыми средствами. Однако для выяснения основных характеристик рассеянного поля вполне достаточно на первом этапе провести рассмотрение на примере стационарной поверхности (точнее, локально стационарной), имеющей среднее значение, стандартное отклонение, функцию распределения высот поверхности и автокорреляционную функцию. Такие поверхности во многих случаях встречаются и в реальных условиях, например море, широкие равнины с сопками и т. п. В отличие от работы М.А. Исаковича в работе [4] анализ рассеяния проведен не только для гауссовой автокорреляционной функции поверхности, но и для экспоненциальной. Использование последней приводит к значительно большему сближению расчетных результатов с некоторыми экспериментальными данными, чем применение гауссовой функции [4]. В других случаях большее сближение обеспечивает гауссова автокорреляционная функция.

#### *Расчеты для автокорреляционной функции экспоненциального вида.*

Напряженность поля с вертикальной поляризацией (вдоль направления  $\theta$ ), рассеянного шероховатой поверхностью с неровностями, много большими длинами волны, можно определить по следующей формуле [4, (4.103)] (оставлен первый основной член и опущен зеркальный член):

$$V_{\theta} \approx \left( \frac{k}{4R_0} \right)^2 a_1 a_2 D_1^2 m^2 \frac{2Q}{(Q^2 + C)^{1.5}}, \quad (1.8.1)$$

где  $V_{\theta} = \langle E_{\theta} E_{\theta}^* \rangle$  — среднее значение квадрата напряженности поля (звездочка — комплексно-сопряженная величина),  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $a_1$  и  $a_2$  — поперечный и продольный радиусы рассеивающей поверхности, выбраны равными по 200 км,  $D_1 = (\cos \theta + \cos \theta^0) \cos \varphi$ ,  $\theta^0$  — угол падения (с вертикалью)

на поверхность,  $\theta$  — угол отражения (угол с вертикалью),  $\varphi$  — угол отклонения в азимутальном направлении,  $m$  — радиус корреляции профиля поверхности,  $Q = \sigma^2 q_z^2$ ,  $\sigma^2$  — дисперсия высот неровностей поверхности, причем применимость формулы (1.8.1) оправдана при условии  $Q \gg 1$ , в крайнем случае — с небольшими погрешностями при  $Q > 1$ ,  $q_z = k(\cos \theta + \cos \theta^0)$ ,  $C = (q_x^2 + q_y^2) m^2$ ,  $q_x = k \sin \theta^0 - \sin \theta \cos \varphi$ ,  $q_y = -k \sin \theta \sin \varphi$ .  $R_0$  — расстояние от приемника до центра зоны рассеяния, выбрано равным 2000 км. Здесь восстановлен ранее опущенный за ненадобностью для локационных задач в [4, (4.103)] в символе  $C$  азимутальный член  $q_y$ . При  $\varphi = 0$  слагаемое  $q_y$  также равно нулю. Выражение (1.8.1) построено при условии, что амплитудное значение падающего поля равно единице. Кроме того, необходимо отметить, что уравнение (1.8.1) было получено в [4] для рассеяния только в плоскости падения, т. е. для радиолокационного случая. Чтобы распространить его на азимутальную координату, необходимо было дополнить уравнение [4, (4.62)] включением в выходной вариант параметра  $C$  еще слагаемого  $q_y^2$ . Для этого необходимо было воспользоваться табличным значением интеграла [5, п. 3.937, 2; 6, п. 2.5.44, 13]:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\tau q_x \cos \varphi_0 + \tau q_y \sin \varphi_0) d\varphi = 2\pi J_0 \left( \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \tau \right).$$

В результате в формуле [4, (4.71)] вместо  $2\pi J_0(q_x \tau)$  появилось выше полученное выражение.

Зеркальный член  $V_0$ , выведенный для конкретных размеров отражающей поверхности ( $a_1$  и  $a_2$ ) и определяющий результат дифракции Френеля, имеет вид:

$$V_0 = \left( \frac{k}{4R_0} \right)^2 \frac{a_1 a_2 D_1^2}{u} \exp \left( -\frac{q_x^2}{4u} \right) e^{-Q},$$

где  $u = \frac{1}{4a_1^2} + k^2 \nu^2 a_1^2$ . Принято также, что  $a_1 = a_2$ .

В данном случае этот зеркальный член опущен, потому что в него входит множитель  $e^{-Q}$ , который при  $Q \gg 1$  сводит его значение к весьма малой величине. Заметим также, что при наклонном облучении и равных размерах  $a_1$  и  $a_2$  облучающего потока продольный размер плоской облучаемой поверхности  $a_2 = a_1 / \cos \theta^0$ . В дальнейшем при оценке напряженности поля при зеркальном отражении от гладкой поверхности будем использовать модель неограниченной отражающей поверхности с учетом только лучевой расходимости потока (увеличение расстояния вдвое при плоской поверхности приводит к снижению напряженности поля на 6 дБ). В других энергетических расчетах будет учитываться физическая ограниченность продольного размера рассеивающей площади. Для этого вместо безграничного увеличения отражающей поверхности в продольном направлении в соответствии с  $1 / \cos \theta^0$  в расчетную формулу введено выражение  $2 / (\cos \theta^0 + 1)$ , в среднем хорошо аппроксимирующее реальное изменение размеров зоны покрытия в пределах от половины скачка до радиогоризонта.

Для дальнейших расчетов удобно несколько перестроить формулу (1.8.1). Параметры, определяющие шероховатость поверхности, могут быть сгруппированы в один блок  $g$ , в котором собраны три величины —  $\sigma$ ,  $m$  и  $\lambda$ . Тогда (1.8.1) при-

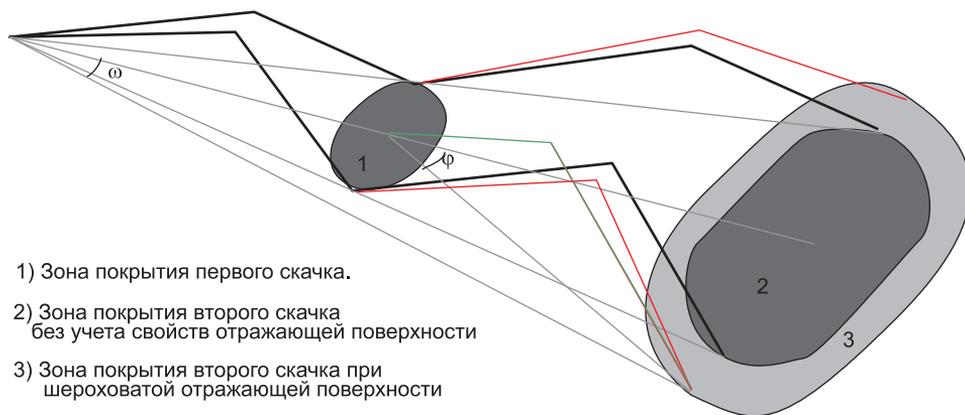
обретает вид:

$$V_{\theta} \approx (2\pi)^2 D_1^2 \left( \frac{a_1}{R_0} \right)^2 \frac{g}{8} \times \frac{(-2\pi(\cos \theta + \cos \theta^0))^2}{\left( (-2\pi)^4 (\cos \theta + \cos \theta^0)^4 + g(2\pi)^2 (\sin \theta^0 - \sin \theta \cos \varphi)^2 \right)^{1,5}}, \quad (1.8.2)$$

где  $g = (m/\lambda)^2 (\lambda/\sigma)^4$ .

Из этих выражений видно, что все статистические свойства при выбранной модели сосредоточены в величине  $g$ , включающей три отмеченных выше входных параметра. Никакие взаимные изменения этих входных параметров в принятой модели не повлияют на результат, если величина параметра  $g$  при этом не изменится.

Чтобы не выйти из рамок приближения Кирхгофа, необходимо соблюсти ряд ограничений. Первое, необходимо соблюдать неравенство  $m \gg \sigma$ . Второе, величина  $m$  должна быть много больше длины волны. Третье, радиус закруглений должен быть также много больше длины волны. В крайнем случае, допуская некоторую ошибку, можно ограничиться простыми неравенствами. Последнее условие ограничивает также параметр  $g$  сверху от чрезмерного увеличения отношения  $(\lambda/\sigma)^4$ . Чрезмерное увеличение отношений  $\lambda/\sigma$  и  $m/\lambda$  приближает ситуацию к зеркальному отражению от гладкой поверхности, что приводит к превалированию других закономерностей, не учитываемых формулой (1.8.1) или (1.8.2). Расчеты показывают, что приведенные формулы достаточно хорошо подходят для описания процесса рассеяния, если параметр  $g$  удовлетворяет неравенству  $1000 \gg g \gg 0,1$ . Этот диапазон охватывает практически все встречающиеся в природе ситуации. Например, в КВ-диапазоне при  $\lambda = 0,03$  км для холмистой местности с  $\sigma = 0,05$  км и  $m = 1$  км имеем  $g = 144$ . Для гористых районов с  $\sigma = 0,3$  км и  $m = 1$  км имеем  $g = 0,11$ .



- 1) Зона покрытия первого скачка.
- 2) Зона покрытия второго скачка без учета свойств отражающей поверхности
- 3) Зона покрытия второго скачка при шероховатой отражающей поверхности

Рис. 1.8.1. Схема облучения поверхности

На рис. 1.8.1 показана схема облучения поверхности. Рассеяние от шероховатой поверхности происходит во всех направлениях, включая обратное, вследствие

чего снижается максимальный уровень напряженности поля в прямом направлении и расширяется относительная зона покрытия.

На рис. 1.8.2 и 1.8.3 приведены примеры расчетов рассеяния от шероховатой поверхности в вертикальной плоскости без учета диаграммы направленности передающей антенны. На рис. 1.8.2 для случая расположения передатчика в дальней зоне показаны кривые рассеяния при угле подъема падающего сигнала  $\alpha^\circ = 10^\circ$  и произвольном вертикальном угле отражения  $\theta$  без учета затенений, а на рис. 1.8.3 — с учетом затенений. Расчеты проведены для следующих параметров поверхности:  $\lambda = 0,03$  км, параметр  $g$  имеет диапазон значений от 0,1 до 1000 с логарифмическим шагом  $10^{-1}$ ,  $10^{-0,5}$ ,  $10^0$  и т. д., т. е. охватывает все виды местности, от холмистой до ярко выраженной гористой поверхности.

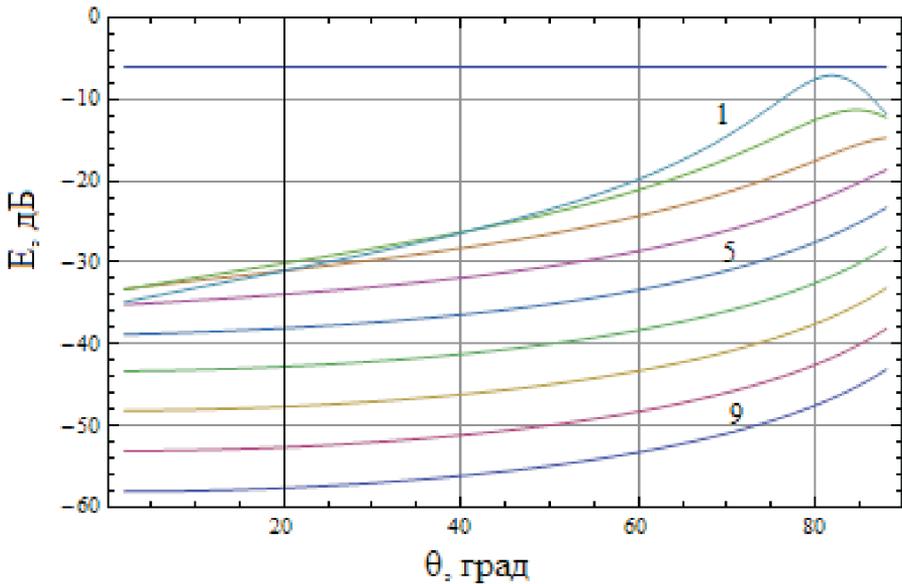


Рис. 1.8.2. Рассеяние от шероховатой поверхности без учета диаграммы направленности передающей антенны и без учета затенений

Учет затенений [7], в дополнение к естественному ослаблению напряженности поля, при малых углах подъема диаграммой передающей антенны, еще больше ограничивает увеличение напряженности поля при низких углах подъема. Соответствующая формула ослабления вследствие затенений имеет вид:

$$H = \frac{F\left(\frac{\mu_1}{\sigma_\alpha}\right) F\left(\frac{\mu_2}{\sigma_\alpha}\right)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1}, \quad (1.8.3)$$

где  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha$  — угол падения или отражения,  $\sigma_\alpha$  — стандартное отклонение наклона поверхности (среднее отношение  $\sigma/m$ ).

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\Lambda = 0,5 \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_\alpha}{\mu} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_\alpha^2}} - \operatorname{erfc} \left( \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma_\alpha} \right) \right),$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Величина  $H$  является множителем при выражении напряженности поля. Сравнивая рис. 1.8.2 и 1.8.3 легко увидеть различия в области углов падения больше  $80^\circ$ . Кривые 1 соответствует значению  $g = 1000$ , кривые 9 — значению  $g = 0,1$ .

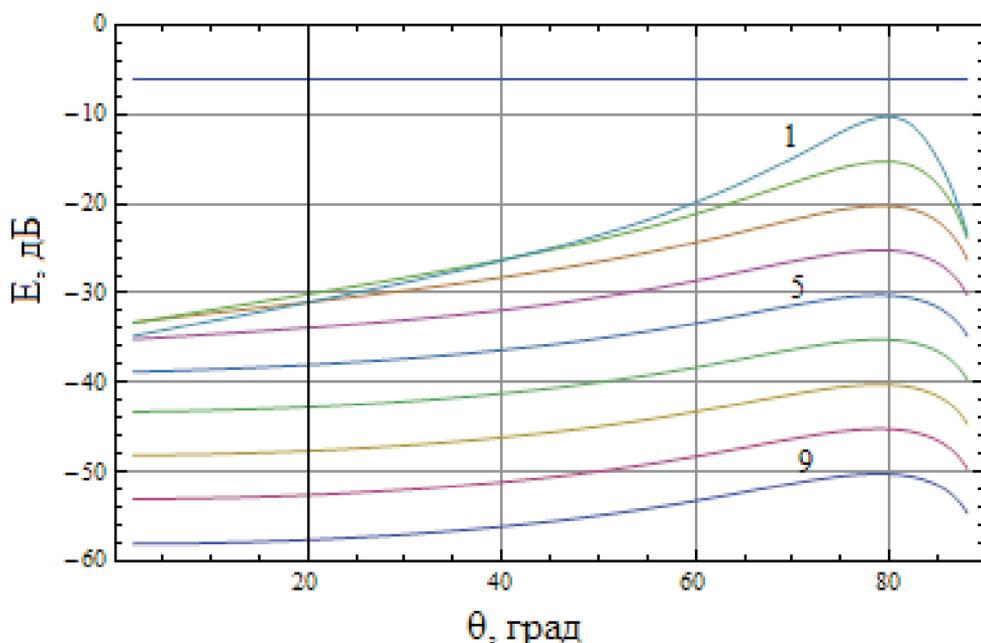


Рис. 1.8.3. Рассеяние от шероховатой поверхности без учета диаграммы направленности передающей антенны, с учетом затенений

На рис. 1.8.2–1.8.7 для сравнения показаны горизонтальные линии  $-6$  дБ — это уровень напряженности поля при зеркальном отражении от гладкой поверхности, если бы передатчик был расположен от центра рассеяния на удалении  $\rho = R_0$ . Видно, что верхние кривые, соответствующие наименее шероховатому рельефу, подходят достаточно близко к зеркальному уровню, не доходя примерно 6 дБ. Проводить расчеты для еще более гладкой поверхности, чтобы попытаться приблизиться к уровню  $-6$  дБ, нецелесообразно, так как формулы (1.8.1) и (1.8.2) не предусматривают отражения от почти гладкой поверхности.

Пример рассеяния в горизонтальной плоскости на рис. 1.8.4 показан для типичной величины угла подъема приходящего сигнала  $\alpha^\circ = 10^\circ$  и равного ему угла подъема отраженного сигнала  $\alpha = 10^\circ$ . Здесь и далее кривые 1 соответствуют значению  $g = 1000$ , кривые 9 — значению  $g = 0,1$ .

Приведенный расчет не является полным. Полученная напряженность поля соответствует только вертикальной (точнее  $\theta$ -ой) компоненте. Но в действительности в периферийной от главного направления зоне существует ортогональная

горизонтальная компонента. Отличие формулы для ее расчета от  $\theta$ -ой составляющей состоит в структуре нескольких коэффициентов, что видно из сравнения формул для двух компонент [4, (4.23), (4.26)]:

$$E_{\theta} = -\frac{ik e^{i[\omega t + k(R_0 + \rho_0)]}}{4\pi R_0} \int_x \int_y \left[ (\cos \theta + \cos \theta^0) \cos \varphi - \zeta'_x (\sin \theta - \sin \theta^0 \cos \varphi) + \zeta'_y \sin \theta^0 \sin \varphi \right] e^{i\Psi} dx dy, \quad (1.8.4)$$

$$E_{\theta, \varphi} = -\frac{ik e^{i[\omega t + k(R_0 + \rho_0)]}}{4\pi R_0} \int_x \int_y \left[ \sin \varphi + \cos \theta^0 \cos \theta \sin \varphi + \zeta'_x \cos \theta \sin \theta^0 \sin \varphi - \zeta'_y (\sin \theta^0 \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta^0 \sin \theta) \right] e^{i\Psi} dx dy. \quad (1.8.5)$$

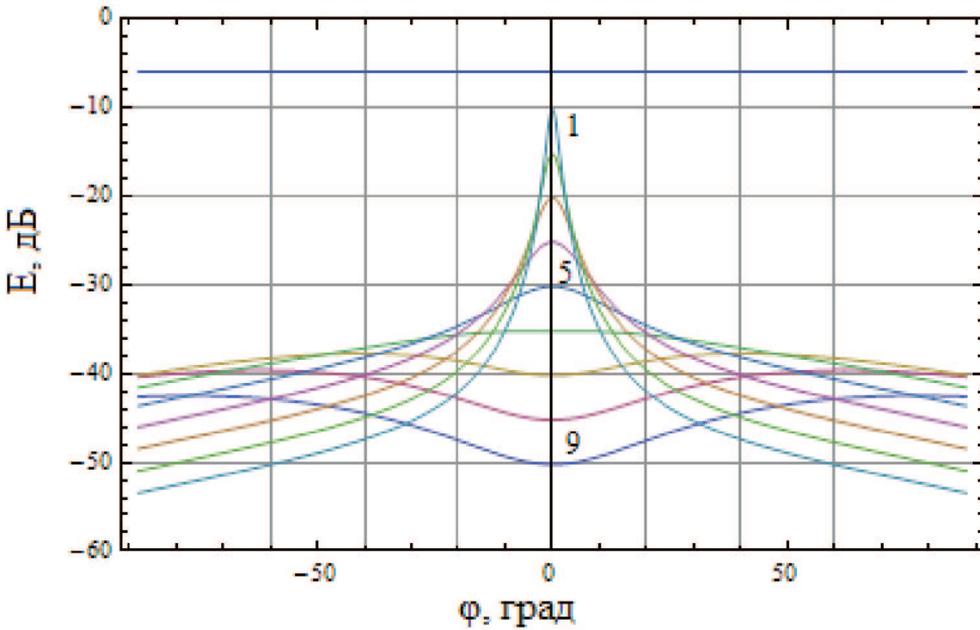


Рис. 1.8.4. Рассеяние в горизонтальной плоскости

Здесь  $E_{\theta, \varphi}$  есть напряженность поля с горизонтальной поляризацией ( $\varphi$ ) при излучении волны с вертикальной поляризацией ( $\theta$ ),  $\zeta$  — текущая высота поверхности.

На основе формулы (1.8.5) рабочее выражение для расчета напряженности поля ортогональной поляризации получено в виде:

$$V_{\varphi} = \frac{(2\pi)^2}{8} F^2 \frac{2}{\cos \theta^0 + 1} h^2 g \frac{q_z^2}{(q_z^4 + gq^2)^{1,5}}, \quad (1.8.6)$$

$$F = (1 + \cos \theta^0 \cos \theta) \sin \theta,$$

$$h = a_1/R_0 = 0,1.$$

Для тех же условий, что и в рассмотренном выше примере, семейство кривых напряженности поля, имеющего только ортогональную поляризацию, приведено на рис. 1.8.5.

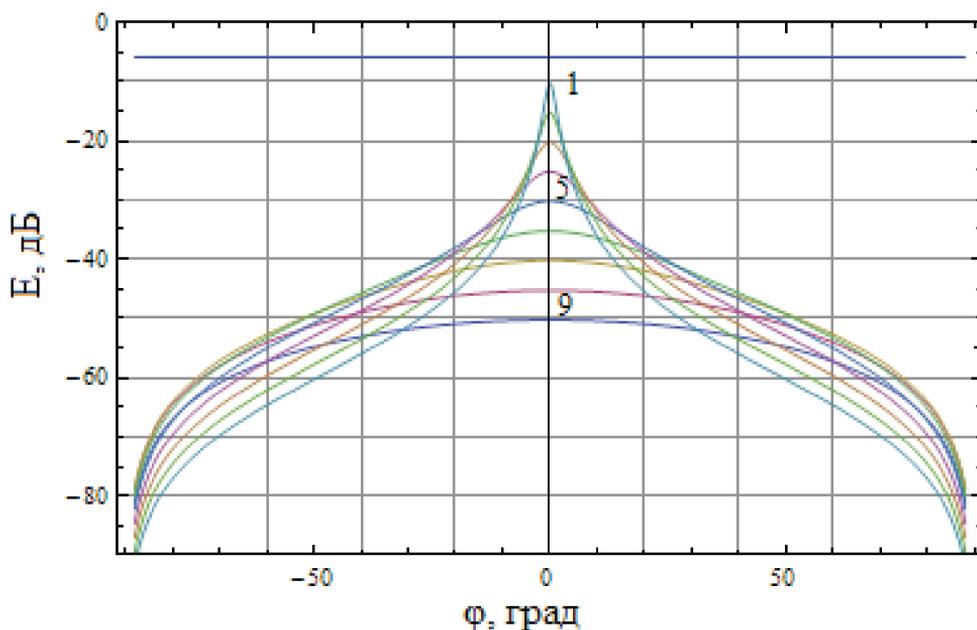


Рис. 1.8.5. Рассеяние в горизонтальной плоскости ортогональной компоненты

Из рисунка видно, что по главному направлению, где  $\varphi = 0$ , ортогональная составляющая равна нулю, и при больших параметрах шероховатости наибольший вклад происходит при углах, далеких от центра. Коротковолновые сигналы имеют обычно эллиптическую поляризацию со случайными параметрами. И так как величины напряженности поля, показанные на рис. 1.8.4 и 1.8.5, до логарифмирования получены как среднеквадратичные величины, то их перед логарифмированием можно просто сложить. Теперь полная формула для расчета суммарной напряженности поля для двух поляризаций с учетом затенений приобретает вид:

$$V = (V_\theta + V_\varphi) H, \quad (1.8.7)$$

где  $V_\theta$ ,  $V_\varphi$  и  $H$  определены формулами (1.8.2), (1.8.6) и (1.8.3), соответственно. Результирующее семейство приведено на рис. 1.8.6.

Расчеты показывают, что степень азимутального рассеяния, как и ожидается из физических представлений, увеличивается при увеличении угла подъема входящего сигнала. Из сравнения рис. 1.8.4 и 1.8.6 видно, что учет ортогональной поляризации вносит существенный вклад в общую напряженность рассеянного поля. Например, при азимуте  $25^\circ$  уровень сигнала вырос почти на 5 дБ, а при азимуте  $75^\circ$  — на 21 дБ. Примечательно, что, начиная с некоторого порога шеро-

ховатости, уровень рассеянного сигнала на боковой периферии становится выше, чем в главном направлении. Здесь, вероятно, основную роль играют наклоны неровностей, при низких углах падения переправляющие большую часть энергии в боковые направления. Подтверждением этому может служить семейство кривых на рис. 1.8.7, рассчитанное для более крутых углов падения и отражения  $-\theta^0 = \theta = 60^\circ$ , где азимутальные зависимости ведут себя намного более спокойно. Здесь также видно, что при более крутых углах рассеяние в прямом направлении при тех же условиях заметно ослаблено.

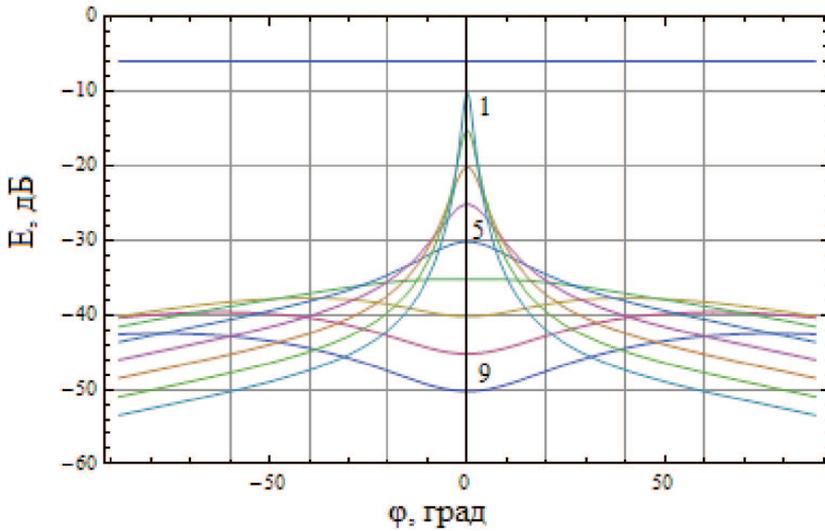


Рис. 1.8.6. Рассеяние в горизонтальной плоскости суммарного сигнала

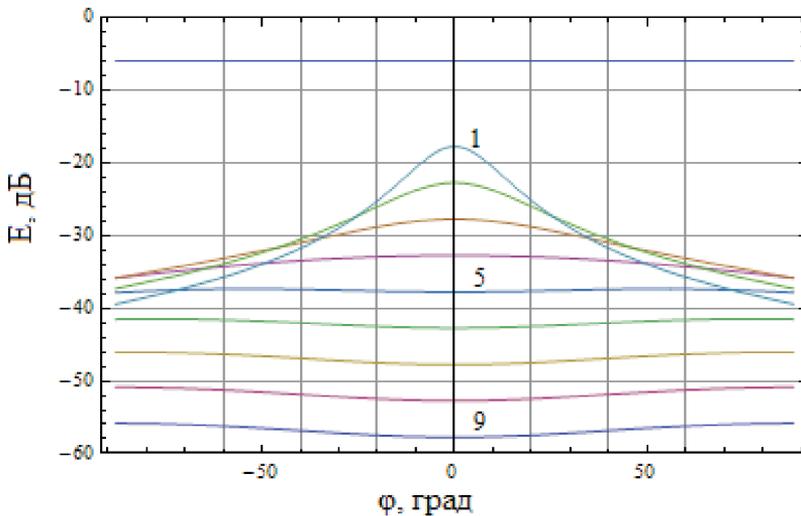


Рис. 1.8.7. Рассеяние в горизонтальной плоскости суммарного сигнала с углом подъема, равным  $60^\circ$